DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Primošten, 4.travnja-6.travnja 2016.

6. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Neka je x broj bombona koje je imala Janica.

Bratu je dala $\frac{x}{2}$ bombona pa joj je ostalo $\frac{x}{2}$ bombona.

Pojela je $\frac{1}{6}\cdot\frac{x}{2}=\frac{x}{12}$ bombona te je poslije toga imala $\frac{x}{2}-\frac{x}{12}=\frac{5x}{12}$ bombona.

Kako je izgubila 2 ili 3 bombona, a Petri dala 6 bombona, postoje dvije mogućnosti:

$\frac{5x}{12}-8=21$ ili $\frac{5x}{12}-9=21$.

Iz $\frac{5x}{12}-8=21$ slijedi $x=\frac{29\cdot 12}{5}\notin\mathbb{N}$.

Iz $\frac{5x}{12}-9=21$ slijedi $x=\frac{30\cdot 12}{5}=72$.

Janica je imala 72 bombona.

Drugi način:

Prije nego što je Petri dala bombone Janica je imala $21 + 6 = 27$ bombona.

Prije toga je izgubila 2 ili 3 bombona, a to znači da je prije toga imala $27 + 2 = 29$ bombona ili $27 + 3 = 30$ bombona.

Nakon što je bratu dala bombone, pojela je $\frac{1}{6}$ ostatka, a ostalo joj je $\frac{5}{6}$ tog ostatka. Dakle, $\frac{5}{6}$ tog ostatka je 29 ili 30.

S obzirom da je samo 30 djeljiv s 5, $\frac{5}{6}$ tog ostatka je 30, a ostatak je 36.

Budući da je bratu dala polovinu bombona, Janica je na početku imala $36 \cdot 2 = 72$ bombona.

Treći način:

Označimo broj bombona s *x*.

Tada iz uvjeta zadatka slijedi $\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}x+a+6+21=x$, pri čemu je *a* jednako 2 ili 3.

Pomnožimo li gornju jednakost s 12, dobit ćemo $6x + x + 12a + 27\cdot 12 = 12x$ odnosno

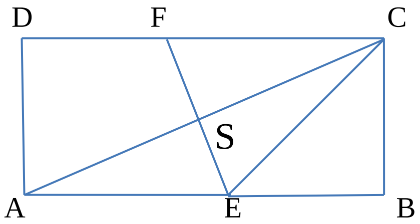
$5x = 324 + 12a$.

Za $a = 2$ je $5x = 348$ što je nemoguće jer *x* mora biti prirodan broj.

Za $a = 3$ je $5x = 360$ odakle slijedi $x = 72$.

Janica je imala 72 bombona.

2. Prvi način:



Kako je trokut *EBC* jednakokračan pravokutan, vrijedi $|\measuredangle ECB| = |\measuredangle BEC| = 45°$.

Budući da je *ABCD* pravokutnik, slijedi $|\measuredangle FCE| = 90° - |\measuredangle ECB| = 45°$.

S obzirom da točka *E* pripada simetrali *EF* dijagonale $\overline{AC}$, onda je $|EA| = |EC|$ što znači da je trokut *AEC* jednakokračan.

Tada je $|\measuredangle ACE| = |\measuredangle EAC|$.

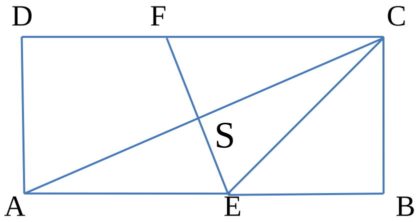
Dalje vrijedi $|\measuredangle EAC| = |\measuredangle FCA|$ jer su to šiljasti kutovi s usporednim kracima.

Dakle, $|\measuredangle ACE| = |\measuredangle FCA| = \frac{|\measuredangle FCE|}{2} = \frac{45°}{2} = 22.5°$.

Kako je $\measuredangle DFE$ vanjski kut trokuta *CFS*, vrijedi

$|\measuredangle DFE| = |\measuredangle CSF| + |\measuredangle FCA| = 90° + 22.5° = 112.5°$.

Drugi način:



Kako je trokut EBC jednakokračan i pravokutan, vrijedi $|\measuredangle ECB| = |\measuredangle BEC| = 45°$.

Pravac FE je simetrala dijagonale $\overline{AC}$ pa je S polovište dužine $\overline{AC}$ i vrijedi $\overline{FE} \perp \overline{AC}$. Zato je

$\Delta AES \cong \Delta CES$ (prema poučku S-K-S – jedna zajednička kateta, pravi kut i $|AS| = |SC|$).

Slijedi da je $|\measuredangle SEA| = |\measuredangle CES|$. Kako je $|\measuredangle SEA| + |\measuredangle CES| + |\measuredangle BEC| = 180°$, slijedi

$2|\measuredangle CES| = 180° - 45°$ odnosno $|\measuredangle CES| = \frac{135°}{2} = 67.5°$.

Konačno, kako je $ABCD$ pravokutnik, to je $AB \parallel CD$, a za kutove s paralelnim kracima vrijedi

$|\measuredangle DFE| = |\measuredangle BEF| = |\measuredangle CEF| + |\measuredangle BEC| = 67.5° + 45° = 112.5° = 112°30'$.

3. Prvi način:

U tim se brojevima svaka od tih znamenaka pojavljuje na svakom dekadskom mjestu

$8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ puta.

Zato je zbroj znamenaka na svakom dekadskom mjestu jednak

$336 \cdot 9 + 336 \cdot 8 + 336 \cdot 7 + 336 \cdot 6 + 336 \cdot 5 + 336 \cdot 4 + 336 \cdot 3 + 336 \cdot 2 + 336 \cdot 1 =$

$= 336 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 336 \cdot 45 = 15120$.

Onda je zbroj svih tih brojeva

$15120 \cdot 1000 + 15120 \cdot 100 + 15120 \cdot 10 + 15120 \cdot 1 = 15120 \cdot (1000 + 100 + 10 + 1) =$

$= 15120 \cdot 1111 = 16\,798\,320$.

Drugi način:

U tim se brojevima svaka od tih znamenaka pojavljuje na svakom dekadskom mjestu

$8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ puta.

Zato svaka znamenka $x \in \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$ pridonosi ukupnom zbroju s

$336 \cdot x \cdot 1000 + 336 \cdot x \cdot 100 + 336 \cdot x \cdot 10 + 336 \cdot x \cdot 1 =$

$= 336 \cdot x \cdot (1000 + 100 + 10 + 1) = 336 \cdot x \cdot 1111.$

Onda je zbroj svih tih brojeva

$336 \cdot 1111 \cdot (1+2+3+4+5+6+7+8+9) = 336 \cdot 1111 \cdot 45 = 16\ 798\ 320$.

4. Kako je $6 = 2 \cdot 3$, traženi brojevi trebaju biti djeljivi i s 2 i s 3.

Budući da je traženim brojevima zbroj znamenaka djeljiv sa 6, onda je zbroj znamenaka djeljiv i s 3, a to znači da su djeljivi s 3.

Da bi bili djeljivi s 2 znamenka jedinica treba biti 0, 2, 4, 6 ili 8.

Zbroj znamenaka troznamenkastog broja može biti najviše 27.

S obzirom da je zbroj znamenaka traženih brojeva djeljiv sa 6, zbroj znamenaka traženih brojeva može biti 6, 12, 18 ili 24.

Ako je zbroj 6, znamenke mogu biti iz skupova {0, 1, 5}, {0, 2, 4}, {1, 2, 3}.

Traženi brojevi su: 150, 510, 204, 240, 402, 420, 312, 132.

Ako je zbroj 12, znamenke mogu biti iz skupova {0, 3, 9}, { 1, 2, 9}, {0, 4, 8}, { 1, 3, 8}, { 0, 5, 7}, {1, 4, 7}, { 2, 3, 7}, { 1, 5, 6 }, { 2, 4, 6}, {3, 4, 5}.

Traženi brojevi su: 390, 930, 192, 912, 408, 480, 804, 840, 138, 318, 570, 750, 174, 714, 372, 732, 156, 516, 246, 264, 426, 462, 624, 642, 354, 534.

Ako je zbroj 18, znamenke mogu biti iz skupova {1, 8, 9}, {2, 7, 9}, {3, 6, 9}, {4, 5, 9}, {3, 7, 8}, {4, 6, 8}, {5, 6, 7}.

Traženi brojevi su: 198, 918, 792, 972, 396, 936, 594, 954, 378, 738, 468, 486, 648, 684, 846, 864, 576, 756.

Ako je zbroj 24, znamenke mogu biti iz skupa {7, 8, 9}.

Traženi brojevi su: 798, 978.

Ukupan broj traženih brojeva je 54.

5. Prvi način:

U 1. mogućem slučaju natjecatelji žive u 18 ili više različitih naselja.

Tada iz nekih 18 različitih naselja u kojima žive odaberemo po 1 učenika i time smo izvršili traženi odabir.

U 2. mogućem slučaju natjecatelji žive u 17 različitih naselja.

U tom slučaju nije moguće odabrati 18 učenika koji žive u 18 različitih naselja.

Kada bi u svakom od tih naselja bilo najviše po 17 učenika, tada bi u tih 17 naselja bilo najviše $17 \cdot 17 = 289$ učenika. Kako je ukupan broj učenika 290, u nekom od tih 17 naselja živi barem 18 učenika. Iz takvog naselja odaberemo 18 učenika i time smo izvršili traženi odabir.

U 3. mogućem slučaju natjecatelji žive u 16 ili manje različitih naselja.

U tom slučaju (analogno kao u 2. slučaju) u nekom od tih naselja živi barem 18 učenika pa iz takvog naselja odaberemo 18 učenika i imamo traženi odabir.

Drugi način:

Pretpostavimo da se ne može odabrati 18 učenika koji žive u istom naselju niti 18 učenika koji dolaze iz 18 različitih naselja.

To znači da svi učenici dolaze iz najviše 17 naselja i iz svakog naselja dolazi najviše 17 učenika.

U tom slučaju bi najveći mogući broj učenika bio $17 \cdot 17 = 289$, a na natjecanju je 290 učenika (jedan više).

Dakle, pretpostavka je bila netočna pa iz jednog naselja dolazi (barem) 18 učenika ili se može odabrati 18 učenika iz 18 različitih naselja, a što je i trebalo dokazati.