DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Primošten, 4.travnja-6.travnja 2016.

5. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Točan broj je $10 \cdot x + y$, a budući da je znamenka desetica dva puta veća od znamenke jedinica, vrijedi $x = 2 \cdot a$ i $y = a$. Dakle, traženi broj je oblika $10 \cdot 2 \cdot a + a = 21 \cdot a$.

U pogrešnom broju $10 \cdot y + x$ slijedi da se radi o broju oblika $10 \cdot a + 2 \cdot a = 12 \cdot a$.

Dalje slijedi da je $288 \cdot (21 \cdot a - 12 \cdot a) = 7\,776$

$$21 \cdot a - 12 \cdot a = 7776 : 288$$

$$9 \cdot a = 27$$

$$a = 3$$

Traženi broj je $21 \cdot a = 21 \cdot 3 = 63$.

Točan umnožak je $63 \cdot 288 = 18\,144$.

Drugi način:

Točan broj je $\overline{xy} = 10 \cdot x + y$, a budući da je znamenka desetica dva puta veća od znamenke jedinica, vrijedi $x = 2 \cdot y$. Dakle, traženi broj je oblika $10 \cdot 2 \cdot y + y = 21 \cdot y$.

U pogrešnom broju (broju zamijenjenih znamenaka) je $\overline{yx} = 10 \cdot y + x$ pa slijedi da se radi o broju oblika $10 \cdot y + 2 \cdot y = 12 \cdot y$.

Prema uvjetu zadatka vrijedi $288 \cdot \overline{yx} + 7776 = 288 \cdot \overline{xy}$ odnosno $288 \cdot 12 \cdot y + 7776 = 288 \cdot 21 \cdot y$.

Rješavanjem te jednadžbe redom dobivamo $3456 \cdot y + 7776 = 6048 \cdot y$ odnosno $2592 \cdot y = 7776$ odakle je $y = 3$ odnosno $x = 6$.

Traženi broj je $21 \cdot y = 21 \cdot 3 = 63$.

Točan umnožak je $63 \cdot 288 = 18\,144$.

Treći način:

Parovi dvoznamenkastih brojeva kojima je jedna znamenka dva puta veća od druge su: 12 i 21, 24 i 42, 36 i 63 te 48 i 84. Točan broj je onaj u paru kojemu je znamenka desetica dva puta veća od znamenke jedinica.

Prema uvjetima zadatka vrijedi da je:

$21 \cdot 288 - 12 \cdot 288 = (21 - 12) \cdot 288 = 9 \cdot 288 = 2\,592$,

$42 \cdot 288 - 24 \cdot 288 = (42 - 24) \cdot 288 = 18 \cdot 288 = 5\,184$,

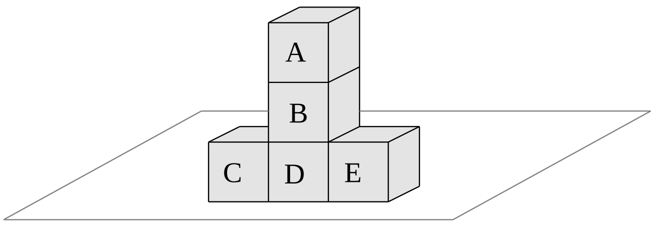
$63 \cdot 288 - 36 \cdot 288 = (63 - 36) \cdot 288 = 27 \cdot 288 = 7\,776$,

$84 \cdot 288 - 48 \cdot 288 = (84 - 48) \cdot 288 = 36 \cdot 288 = 10\,368$.

Budući da je u trećem slučaju razlika umnožaka jednaka 7 776, traženi broj je 63.

Točan umnožak je $63 \cdot 288 = 18\,144$.

2. Promotrimo sliku:



Kocka A ima 5 slobodnih strana. Zbroj će biti maksimalan kada je strana s brojem 1 nevidljiva (tom stranom je kocka A prislonjena na kocku B) i iznosi $6 + 2 + 5 + 3 + 4 = 20$.

Kocka D ima dvije slobodne strane, a zbroj bilo koje od kombinacije je 7.

Kocke B, C i E imaju po 4 slobodne strane.

Kod kocke B slobodna su dva para nasuprotnih strana pa je maksimalan zbroj $7 + 7 = 14$.

Kod kocaka C i E slobodan je po jedan par nasuprotnih strana i još dvije strane. Maksimalan zbroj će se dobiti ako se vide brojevi 5 i 6, a skrivene su strane na kojima su brojevi 1 i 2 te zbroj tada iznosi $5 + 6 + 7 = 18$.

Maksimalan zbroj je $20 + 7 + 14 + 2 \cdot 18 = 77$.

3. Prvi način:

Promatramo skup prirodnih brojeva manjih od 2016 odnosno skup {1, 2, 3, 4, …, 2015}.

Među prirodnim brojevima manjim od 2016 ima 1007 brojeva djeljivih brojem 2, 671 broj djeljiv brojem 3 i 335 brojeva djeljivih brojem 6 odnosno djeljivih istovremeno brojevima 2 i 3.

Dakle, među prirodnim brojevima manjim od 2016 ima 1007 + 671 – 335 = 1343 broja djeljiva brojem 2 ili brojem 3 (moramo oduzeti 335 jer smo brojeve djeljive brojevima 2 i 3 brojali dvaput).

Brojeva koji su djeljivi brojevima 2 i 5 ima 201, brojeva djeljivih brojevima 3 i 5 ima 134, dok brojeva djeljivih brojem 6 (dakle, brojevima 2 i 3) i 5 ima 67.

Slijedi da brojeva koji su djeljivi brojem 2 ili brojem 3, ali i brojem 5, ima 201 + 134 – 67 = 268 (one koji su djeljivi brojevima 2 i 3 opet smo brojali dvaput pa moramo oduzeti 67).

Konačno, brojeva manjih od 2016 koji su djeljivi brojem 2 ili brojem 3, a nisu djeljivi brojem 5 ima 1343 – 268 = 1075.

Drugi način:

Među prirodnim brojevima manjim od 2016 ima 2014 : 2 = 1007 djeljivih brojem 2. Među prirodnim brojevima manjim od 2016 i koji su djeljivi brojem 2, oni koji su djeljivi brojem 5 ujedno su djeljivi brojem 10, a ima ih 2010 : 10 = 201. Prirodnih brojeva manjih od 2016 koji su djeljivi brojem 2, ali nisu brojem 5 ima 1007 – 201 = 806.

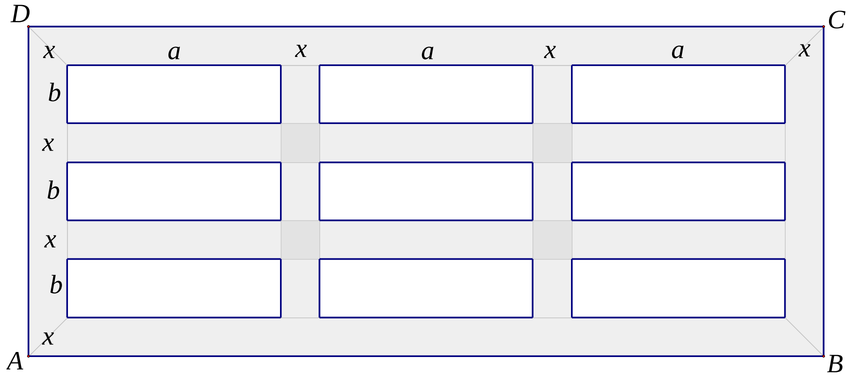
Među prirodnim brojevima manjim od 2016 ima 2013 : 3 = 671 djeljiv brojem 3. Među prirodnim brojevima manjim od 2016 koji su djeljivi brojem 3, oni koji su djeljivi brojem 5 su ujedno djeljivi brojem 15, a ima ih 2010 : 15 = 134. Prirodnih brojeva manjih od 2016 koji su djeljivi brojem 3, ali nisu brojem 5 ima 671 – 134 = 537.

Među prirodnim brojevima manjim od 2016 ima 2010 : 6 = 335 djeljivih brojevima 2 i 3 (odnosno brojem 6). Među prirodnim brojevima manjim od 2016 koji su djeljivi brojem 6, oni koji su djeljivi brojem 5 su ujedno djeljivi brojem 30, a ima ih 2010 : 30 = 67. Prirodnih brojeva manjih od 2016 koji su djeljivi brojem 6, ali nisu brojem 5 ima 335 – 67 = 268.

Prirodnih brojeva manjih od 2016 koji su djeljivi brojem 2 ili brojem 3, a nisu djeljivi brojem 5 ima 806 + 537 – 268 = 1075. Brojeve djeljive brojevima 2 i 3 smo brojali dvaput pa smo morali oduzeti 268.

4. Prvi način:

Promotrimo sliku i prema uvjetu zadatka označimo odgovarajuće razmake:



Neka su a i b duljine susjednih stranica manjeg pravokutnika, $a > b$, a x širina razmaka. Tada su duljine stranica pravokutnika $ABCD$ jednake $|AB| = 3 \cdot a + 4 \cdot x$ i $|BC| = 3 \cdot b + 4 \cdot x$, a površina pravokutnika $ABCD$ jednaka je $|AB| \cdot |BC|$ pa vrijedi jednakost $(3 \cdot a + 4 \cdot x) \cdot (3 \cdot b + 4 \cdot x) = 697$.

Rastavimo li broj 697 na proste faktore, dobit ćemo da je $697 = 41 \cdot 17$. Iz uvjeta $a > b$ slijedi da je $3 \cdot a > 3 \cdot b$ odnosno $3 \cdot a + 4 \cdot x > 3 \cdot b + 4 \cdot x$. Tada je $|AB| = 3 \cdot a + 4 \cdot x = 41$ i $|BC| = 3 \cdot b + 4 \cdot x = 17$.

U izrazu $3 \cdot b + 4 \cdot x = 17$ pribrojnik $4 \cdot x$ uvijek je paran, a zbroj je neparan pa slijedi da je broj b neparan broj manji od 7 $(3 \cdot 7 = 21, \quad 21 > 17)$.

Za $b = 1$ vrijedi $3 + 4 \cdot x = 17$ odnosno $4 \cdot x = 14$. No, rješenje ove jednadžbe nije prirodan broj.

Za $b = 3$ vrijedi $9 + 4 \cdot x = 17$ odnosno $4 \cdot x = 8$ pa je $x = 2$.

Za $b = 5$ vrijedi $15 + 4 \cdot x = 17$ odnosno $4 \cdot x = 2$. No, rješenje ove jednadžbe nije prirodan broj.

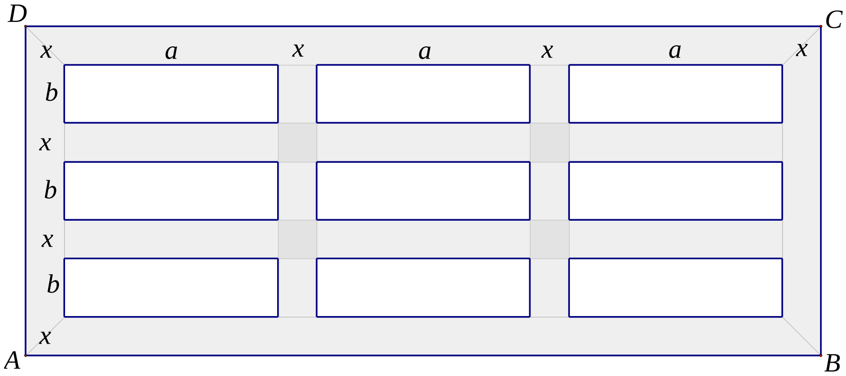
Uvrstimo li $x = 2$ u jednadžbu $3 \cdot a + 4 \cdot x = 41$ redom dobivamo $3 \cdot a + 8 = 41$, $3 \cdot a = 33$, tj. $a = 11$.

Duljine stranica manjeg pravokutnika su 11 cm i 3 cm pa površina jednog manjeg pravokutnika iznosi 33 cm^2. Površina svih devet manjih pravokutnika iznosi 297 cm^2.

Površina osjenčanog dijela razlika je površine pravokutnika $ABCD$ i površine devet manjih pravokutnika: $697 - 297 = 400$ cm^2.

Drugi način:

Promotrimo sliku i prema uvjetu zadatka označimo odgovarajuće razmake:



Neka su a i b duljine susjednih stranica manjeg pravokutnika, $a > b$, a x širina razmaka. Tada su duljine stranica pravokutnika $ABCD$ jednake $|AB| = 3 \cdot a + 4 \cdot x$ i $|BC| = 3 \cdot b + 4 \cdot x$, a površina pravokutnika $ABCD$ jednaka je $|AB| \cdot |BC|$ pa vrijedi jednakost $(3 \cdot a + 4 \cdot x) \cdot (3 \cdot b + 4 \cdot x) = 697$.

Rastavimo li broj 697 na proste faktore, dobit ćemo da je $697 = 41 \cdot 17$. Iz uvjeta $a > b$ slijedi da je $3 \cdot a > 3 \cdot b$ odnosno $3 \cdot a + 4 \cdot x > 3 \cdot b + 4 \cdot x$. Tada je $|AB| = 3 \cdot a + 4 \cdot x = 41$ i $|BC| = 3 \cdot b + 4 \cdot x = 17$.

Iz uvjeta da i duljine stranica malih pravokutnika i razmaci budu prirodni brojevi u centimetrima mora vrijediti nejednakost $4 \cdot x < 17$.

Dakle, duljina razmaka x može biti 1 cm, 2 cm, 3 cm ili 4 cm.

Za $x = 1$ vrijedi $3 \cdot b = 17 - 4 \cdot x = 17 - 4 \cdot 1 = 13$, a u tom slučaju b ne može biti prirodan broj.

Za $x = 2$ vrijedi $3 \cdot b = 17 - 4 \cdot x = 17 - 4 \cdot 2 = 9$ iz čega slijedi da je $b = 3$ cm.

Za $x = 3$ vrijedi $3 \cdot b = 17 - 4 \cdot x = 17 - 4 \cdot 3 = 5$, a ni u tom slučaju b ne može biti prirodan broj.

Za $x = 4$ vrijedi $3 \cdot b = 17 - 4 \cdot x = 17 - 4 \cdot 4 = 1$, a ni u tom slučaju b ne može biti prirodan broj.

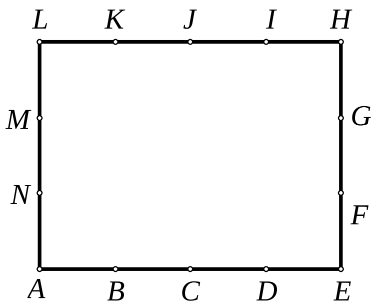
To znači da može biti samo $b = 3$ cm.

Dalje vrijedi da je $a = (41 - 4x) : 3 = (41 - 4 \cdot 2) : 3 = 11$ cm.

Duljine stranica manjeg pravokutnika su 11 cm i 3 cm pa površina jednog manjeg pravokutnika iznosi 33 cm^2. Površina svih devet manjih pravokutnika iznosi 297 cm^2.

Površina osjenčanog dijela razlika je površine pravokutnika $ABCD$ i površine devet manjih pravokutnika: $697 - 297 = 400$ cm^2.

5. Prvi način:
Na duljim stranicama istaknute su po tri točke, a na kraćima po dvije točke različite od vrhova *A*, *E*, *H* i *L*.



Uz oznake kao na slici redom zaključujemo:

Točkom *A* i još nekim drugim točkama pravokutnika određeno je 8 pravaca.

Točkama *B*, *C* i *D* i nekim drugim točkama (osim *A*) određeno je $3 \cdot 9 = 27$ pravaca.

Točkom *E* i još nekim drugim točkama (osim *A*, *B*, *C* i *D*) pravokutnika određeno je 7 pravaca.

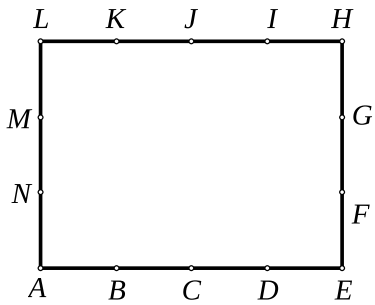
Točkama *F* i *G* i nekim drugim točkama (osim *A*, *B*, *C*, *D* i *E*) određeno je $2 \cdot 6 = 12$ pravaca.

Točkom *H* i nekim drugim točkama (osim *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* i *G*) određena su 3 pravca.

Točkama *K*, *J* i *I* i nekim drugim točkama (osim *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *G* i *H*) određeno je $3 \cdot 2 = 6$ pravaca.

Te točke određuju 8 + 27 + 7 + 12 + 3 + 6 = 63 pravca.

Drugi način:
Na duljim stranicama istaknute su po tri točke, a na kraćima po dvije točke različite od vrhova *A*, *E*, *H* i *L*.



Uz oznake kao na slici redom zaključujemo:

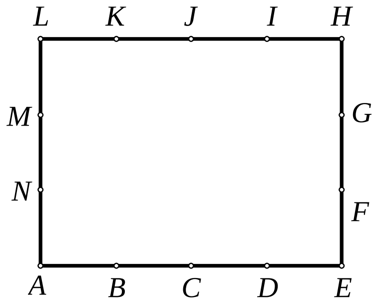
Postoje ukupno 4 pravca kojima pripadaju stranice pravokutnika.

Točke *I*, *J* i *K* sa svakom (od 5) točaka istaknutih na dužini $\overline{AE}$ određuju po 5 različitih pravaca, a točke *F*, *G*, *M*, *N*, *H* i *L* po 4 pravca (različita od stranica). To je $3 \cdot 5 + 6 \cdot 4 = 15 + 24 = 39$ različitih pravaca.

Točke *F* i *G* s točkama od *I* do *N* (tih je točaka 6) određuju po 6 različitih pravaca i tih je pravaca ukupno $2 \cdot 6 = 12$, a točka *H* s točkama *M* i *N* određuje 2 različita pravca. Točke *I*, *J* i *K* s točkama *M* i *N* određuju ukupno 6 pravaca.

Ukupan broj različitih pravaca određenih istaknutim točkama je 4 + 39 + 12 + 2 + 6 = 63.

Treći način:
Na duljim stranicama istaknute su po tri točke, a na kraćima po dvije točke različite od vrhova A, E, H i L.



Uz oznake kao na slici redom zaključujemo:

Vrhovi pravokutnika određuju ukupno 6 pravaca (4 kojima pripadaju stranice i 2 kojima pripadaju dijagonale).

Vrh A i točke na stranicama $\overline{EH}$ i $\overline{HL}$ određuju 5 pravaca (različitih od stranica i dijagonala).

Vrh E i točke na stranicama $\overline{HL}$ i $\overline{AL}$ određuju 5 pravaca (različitih od stranica i dijagonala).

Točka B i točke na stranicama $\overline{EH}$, $\overline{HL}$ i $\overline{AL}$ određuju 9 pravaca (različitih od stranica i dijagonala), a isto vrijedi za točke C i D pa je to 27 pravaca.

Točka F i točke na stranicama $\overline{HL}$ i $\overline{AL}$ određuju 6 pravaca (različitih od stranica i dijagonala), a isto vrijedi za točku G pa je to 12 pravaca.

Točka H i točke na stranici $\overline{AL}$ određuju 2 različita pravca (različita od stranica i dijagonala), a isto vrijedi za točke I, J i K pa je to 8 pravaca.

Ukupan broj različitih pravaca određenih istaknutim točkama je $6 + 5 + 5 + 27 + 12 + 8 = 63$.