ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

23. veljače 2016.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-1.1.

Opseg pravokutnog trokuta iznosi 18, a površina 9. Kolika je duljina hipotenuze tog trokuta?

Prvo rješenje.

Neka su a i b duljine kateta, a c duljina hipotenuze zadanog trokuta.

Kako je $a+b+c=18$, vrijedi

$$(a+b)^2=(18-c)^2=18^2-36c+c^2.$$ 2 boda

Zadani trokut je pravokutan, pa prema Pitagorinom poučku vrijedi $a^2+b^2=c^2$. 1 bod

Slijedi da je

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=c^2+2ab.$$ 2 boda

Budući smo $(a+b)^2$ izrazili na dva načina, izjednačavanjem dobivamo

$$2ab=18^2-36c.$$ 2 boda

Kako je površina trokuta jednaka 9, vrijedi $ab=18$. 1 bod

Zaključujemo da je $36=2ab=18^2-36c$. Odavde je $c=8$. 2 boda

Drugo rješenje.

Neka su a i b duljine kateta, a c duljina hipotenuze zadanog trokuta.

Zadani trokut je pravokutan, pa prema Pitagorinom poučku vrijedi $a^2+b^2=c^2$. 1 bod

Kako je $a+b+c=18$, vrijedi

$$a^2+b^2=c^2=(18-a-b)^2.$$ 2 boda

Nakon kvadriranja dobivamo

$$a^2+b^2=18^2+a^2+b^2-36a-36b+2ab,$$ 2 boda

tj. $18^2+2ab=36(a+b)=36\cdot(18-c)$. 2 boda

Kako je površina trokuta jednaka 9, vrijedi $ab=18$. 1 bod

Zaključujemo da je $18^2+36=36\cdot(18-c)$. Odavde je $c=8$. 2 boda

Treće rješenje.

Neka su a i b duljine kateta, c duljina hipotenuze, a r polumjer upisane kružnice zadanog trokuta. Prema formuli za površinu trokuta

$$P = r \cdot \frac{a+b+c}{2},$$ 2 boda

slijedi da je $9 = r \cdot \frac{18}{2}$, tj. $r = 1$. 2 boda

Za polumjer upisane kružnice u pravokutnom trokutu vrijedi

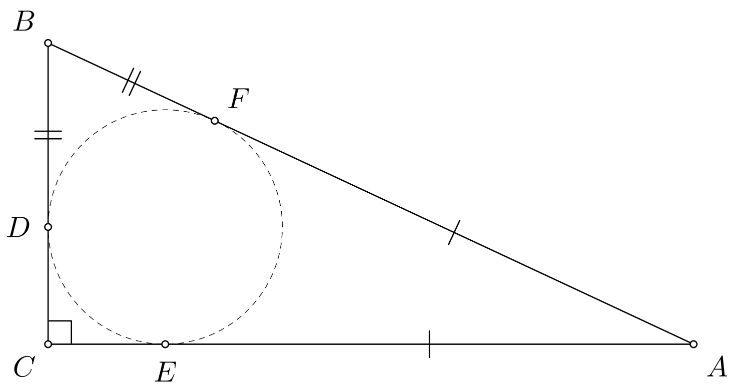
$$r = \frac{a+b-c}{2}.$$ 3 boda

Budući da je $a+b+c = 18$, tj. $a+b = 18-c$, slijedi

$$c = a+b-2r = 18-c-2r = 18-c-2 = 16-c.$$ 2 boda

Dakle, $c = 8$. 1 bod

Napomena: Učenici koji ne znaju formulu za polumjer upisane kružnice pravokutnog trokuta, mogu razmišljati na sljedeći način. Neka su A, B i C vrhovi, a D, E i F dirališta upisane kružnice sa stranicama zadanog trokuta (kao na slici).



Budući da su duljine odsječaka tangenti iz točke na kružnicu jednake vrijedi

$$c = |AF| + |FB| = |AE| + |DB| = (a-r) + (b-r) = a+b-2r.$$

Četvrto rješenje.

Neka su a i b duljine kateta, c duljina hipotenuze.

Uvrstimo li u Heronovu formulu

$$P^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

da je površina $P = 9$, a poluopseg $s = 9$ dobivamo

$$81 = 9(9-a)(9-b)(9-c).$$ 2 boda

Nakon dijeljenja s 9 i množenja izraza na desnoj strani dobivamo

$$9 = 729 - 81(a + b + c) + 9(ab + bc + ca) - abc.$$

U taj izraz uvrštavamo da je $ab = 18$ i $a + b + c = 18$, pa slijedi

$$0 = 720 - 81 \cdot 18 + 9 \cdot (18 + (18 - c) \cdot c) - 18c.$$ 4 boda

Nakon sređivanja dobivamo

$$c^2 - 16c + 64 = 0,$$ 2 boda

tj. $(c - 8)^2 = 0$, odakle je $c = 8$. 2 boda

Zadatak A-1.2.

a) Dokaži da ne postoje dva prirodna broja čija je razlika kvadrata jednaka 987654;

b) Dokaži da ne postoje dva prirodna broja čija je razlika kubova jednaka 987654.

Prvo rješenje.

a) Pretpostavimo da su a i b dva prirodna broja čija je razlika kvadrata jednaka 987654, tj. $a^2 - b^2 = 987654$.

Tada vrijedi

$$(a - b)(a + b) = 987654.$$ 1 bod

Broj 987654 je paran, pa barem jedan od faktora $a - b$ i $a + b$ mora biti djeljiv s 2. 1 bod

Budući da je $a + b = (a - b) + 2b$, slijedi da faktori $a - b$ i $a + b$ daju isti ostatak pri dijeljenju s 2, tj. da su oba djeljiva s 2. 1 bod

Zaključujemo da 4 dijeli $(a - b)(a + b)$, što je nemoguće jer 987654 nije djeljiv s 4. 1 bod

b) Pretpostavimo sad da su a i b dva prirodna broja čija je razlika kubova jednaka 987654, tj. $a^3 - b^3 = 987654$.

Tada je

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = 987654.$$ 1 bod

Broj 987654 je djeljiv s 3, pa barem jedan od faktora $a - b$ i $a^2 + ab + b^2$ mora biti djeljiv s 3. 1 bod

Budući da je $a^2 + ab + b^2 = (a - b)^2 + 3ab$ i barem jedan od brojeva $a - b$ i $a^2 + ab + b^2$ je djeljiv s 3, zaključujemo da oba faktora moraju biti djeljiva s 3. 2 boda

Zaključujemo da je $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ djeljivo s 9, što je nemoguće jer 987654 nije djeljiv s 9. 2 boda

Napomena: Do zaključka da $a - b$ i $a^2 + ab + b^2$ moraju oba biti djeljiva s 3 možemo doći i analizom slučajeva obzirom na ostatke brojeva a i b pri dijeljenju s 3.

Drugo rješenje.

Rastav broja 987654 na proste faktore glasi $987654 = 2 \cdot 3 \cdot 97 \cdot 1697$.

a) Pretpostavimo da su a i b dva prirodna broja čija je razlika kvadrata jednaka 987654, tj. $a^2 - b^2 = 987654$.

Tada vrijedi

$$(a-b)(a+b) = 987654.$$ 1 bod

Budući da je $0 < a - b < a + b$, razlikujemo 8 slučajeva u kojima je redom

$$a - b = 1, 2, 3, 2 \cdot 3, 97, 2 \cdot 97, 3 \cdot 97, 6 \cdot 97 \quad \text{i} \quad a + b = \frac{987654}{a-b}.$$ 1 bod

U svakom od tih slučajeva točno jedan od brojeva $a - b$ ili $a + b$ je paran, a jedan je neparan. 1 bod

Budući da je $(a-b) + (a+b) = 2a$ paran broj dobivamo kontradikciju. 1 bod

b) Pretpostavimo sad da su a i b dva prirodna broja čija je razlika kubova jednaka 987654, tj. $a^3 - b^3 = 987654$.

Tada je

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = 987654.$$ 1 bod

Budući da je $0 < a - b < a^2 + ab + b^2$, razlikujemo 8 slučajeva u kojima je redom

$$a - b = 1, 2, 3, 2 \cdot 3, 97, 2 \cdot 97, 3 \cdot 97, 6 \cdot 97 \quad \text{i} \quad a^2 + ab + b^2 = \frac{987654}{a-b}.$$ 1 bod

U svakom od tih slučajeva točno jedan od brojeva $a - b$ ili $a^2 + ab + b^2$ je djeljiv s 3. 2 boda

Budući da je $a^2 + ab + b^2 - (a-b)^2 = 3ab$ dobivamo kontradikciju. 2 boda

Zadatak A-1.3.

Odredi najmanju moguću vrijednost izraza

$$a^2 + 5b^2 + 8c^2 - 4ab - 4bc - 8c + 24,$$

pri čemu su a, b i c realni brojevi, te odredi a, b i c za koje se ta vrijednost postiže.

Rješenje.

Uočimo da zadani izraz možemo transformirati na sljedeći način

$$\begin{aligned}
a^2 + 5b^2 + 8c^2 - 4ab - 4bc - 8c + 24 &= (a^2 - 4ab + 4b^2) + b^2 + 8c^2 - 4bc - 8c + 24 \\
&= (a-2b)^2 + b^2 + 8c^2 - 4bc - 8c + 24 && \text{2 boda} \\
&= (a-2b)^2 + (b^2 - 4bc + 4c^2) + (4c^2 - 8c + 4) + 20 \\
&= (a-2b)^2 + (b-2c)^2 + (2c-2)^2 + 20. && \text{3 boda}
\end{aligned}$$

Zbog $(a-2b)^2 \geqslant 0$, $(b-2c)^2 \geqslant 0$ i $(2c-2)^2 \geqslant 0$ slijedi

$$(a-2b)^2 + (b-2c)^2 + (2c-2)^2 + 20 \geqslant 20,$$ 2 boda

što znači da je najmanja moguća vrijednost zadanog izraza 20. 1 bod

Izraz poprima vrijednost 20 u slučaju da su svi kvadrati jednaki nuli, odnosno

$$a - 2b = b - 2c = 2c - 2 = 0,$$ 1 bod

iz čega lako slijedi da je $a = 4$, $b = 2$ i $c = 1$. 1 bod

Napomena: Učeniku treba dodijeliti 2 boda ako dio zadanog izraza svede na potpun kvadrat $(a-2b)^2$, $(b-2c)^2$ ili $(2c-2)^2$ (tj. $4(c-1)^2$), kao što je učinjeno na početku rješenja.

Napomena: Umjesto nadopunjavanja na potpun kvadrat, učenici mogu koristiti A–G nejednakost. Ako učenik napiše samo jednu od sljedećih nejednakosti

$$a^2+4b^2 \geqslant 4ab, \qquad b^2+4c^2 \geqslant 4bc, \qquad 4c^2+4 \geqslant 8c$$

treba dobiti 2 boda. Ako na temelju sve tri nejednakosti zaključi da je

$$a^2+5b^2+8c^2-4ab-4bc-8c+24 \geqslant 4ab+4bc+8c-4ab-4bc-8c+20=20$$

treba dobiti ukupno 8 bodova za taj dio rješenja.

Zadatak A-1.4.

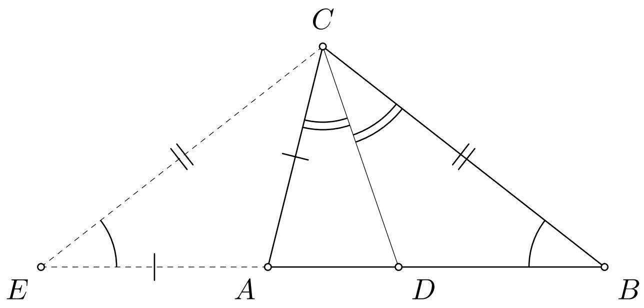
U trokutu ABC kut kod vrha A je dvostruko veći od kuta kod vrha B. Neka simetrala kuta kod vrha C siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki D. Dokaži da vrijedi

$$|BC|=|AD|+|AC|.$$

Prvo rješenje.

Neka je $\beta=\sphericalangle ABC$. Tada je $\sphericalangle BAC=2\beta$.

Neka je točka E na produžetku stranice $\overline{AB}$ preko vrha A takva da je $|AE|=|AC|$. 2 boda



Budući da je kut $\sphericalangle CAE=180^\circ-2\beta$ i $|AE|=|AC|$, zaključujemo da je $\sphericalangle AEC=\beta$. 1 bod

Dakle, $\sphericalangle AEC=\sphericalangle ABC$, tj. $|CE|=|BC|$. 1 bod

Budući da je CD simetrala kuta $\sphericalangle ACB$ vrijedi

$$\sphericalangle ACD=\frac{180^\circ-\sphericalangle ABC-\sphericalangle BAC}{2}=\frac{180^\circ-3\beta}{2}=90^\circ-\frac{3}{2}\beta.$$ 1 bod

U trokutu CED vrijedi

$$\sphericalangle ECD=\sphericalangle ECA+\sphericalangle ACD=\beta+90^\circ-\frac{3}{2}\beta=90^\circ-\frac{1}{2}\beta$$ 1 bod

i

$$\sphericalangle CDE=180^\circ-\sphericalangle DEC-\sphericalangle ECD=180^\circ-\beta-90^\circ+\frac{1}{2}\beta=90^\circ-\frac{1}{2}\beta.$$ 1 bod

Dakle, $\sphericalangle ECD = \sphericalangle CDE$, tj. $|CE| = |DE|$. 1 bod

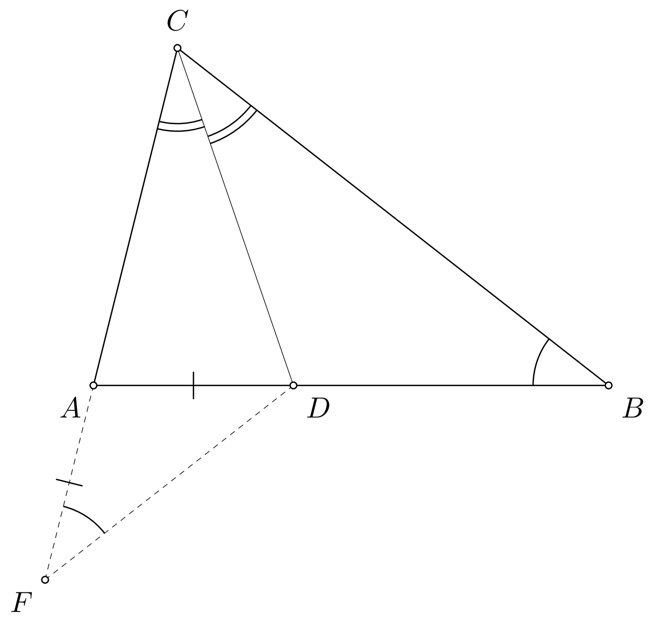
Povežemo li sve dosadašnje zaključke dobivamo

$$|BC| = |CE| = |DE| = |AD| + |AE| = |AD| + |AC|.$$ 2 boda

Drugo rješenje.

Neka je $\beta = \sphericalangle ABC$. Tada je $\sphericalangle BAC = 2\beta$.

Neka je točka F na produžetku stranice $\overline{AC}$ preko vrha A takva da je $|AF| = |AD|$. 2 boda



Budući da je kut $\sphericalangle BAF = 180^\circ - 2\beta$ i $|AF| = |AD|$, zaključujemo da je

$$\sphericalangle DFA = \beta = \sphericalangle ABC.$$ 1 bod

Budući da je CD simetrala kuta $\sphericalangle ACB$ imamo $\sphericalangle FCD = \sphericalangle ACD = \sphericalangle DCB$, a budući da je $\overline{CD}$ zajednička stranica trokuta CFD i CBD, (prema K–S–K teoremu) zaključujemo da su ti trokuti sukladni. 4 boda

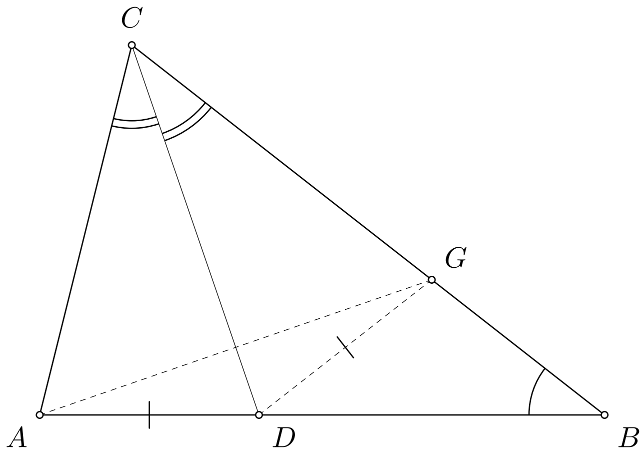
Iz sukladnosti slijedi $|FC| = |BC|$. 1 bod

Povežemo li sve dosadašnje zaključke dobivamo

$$|BC| = |FC| = |AF| + |AC| = |AD| + |AC|.$$ 2 boda

Treće rješenje.

Neka je točka G na stranici $\overline{BC}$ takva da je $|AC| = |CG|$. 2 boda



Budući da je CD simetrala kuta $\sphericalangle ACG$ slijedi da je točka G osnosimetrična točki A obzirom na pravac CD, tj. trokuti ADC i GDC su sukladni. 2 boda

Zbog toga je $|AD| = |GD|$. 1 bod

Također, vrijedi $\sphericalangle CGD = \sphericalangle DAC = 2\sphericalangle ABC$. 1 bod

Budući da je $\sphericalangle CGD$ vanjski kut u trokutu BGD slijedi da je

$$\sphericalangle BDG = \sphericalangle DGC - \sphericalangle DBG = 2\sphericalangle ABC - \sphericalangle ABC = \sphericalangle ABC.$$ 1 bod

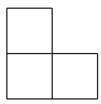
To znači da je $|GD| = |GB|$. 1 bod

Povežemo li sve dosadašnje zaključke dobivamo

$$|BC| = |BG| + |GC| = |GD| + |GC| = |AD| + |AC|.$$ 2 boda

Zadatak A-1.5.

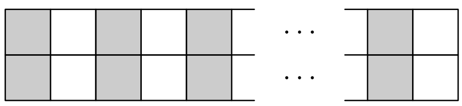
Na koliko načina možemo obojati polja ploče 2×2016 u dvije boje tako da ne postoje tri polja iste boje koja se mogu istovremeno pokriti pločicom oblika kao na slici? Pločicu je dozvoljeno rotirati.



Rješenje.

Ako su u prvom stupcu oba polja bijela, onda u drugom stupcu nijedno polje ne smije biti bijelo. Dakle, u drugom stupcu su oba polja crna. Na isti način zaključujemo da su u trećem stupcu oba polja bijela itd. To je jedno dobro bojanje. 1 bod

Analogno, ako su u prvom stupcu oba polja crna, dobivamo još jedno dobro bojanje. 1 bod



Ako su u prvom stupcu polja različite boje, onda u drugom stupcu ne možemo imati dva polja iste boje. Dakle, u drugom stupcu moraju biti također polja različite boje, te su obje mogućnosti (crno polje je u prvom ili drugom retku) dopuštene. 1 bod

Isti zaključak vrijedi za sve ostale stupce, tj. za svaki stupac imamo 2 mogućnosti. 1 bod

Ukupan broj bojanja u ovom slučaju je $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^{2016}$. 5 bodova

Konačan razultat je $2 + 2^{2016}$. 1 bod

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

23. veljače 2016.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

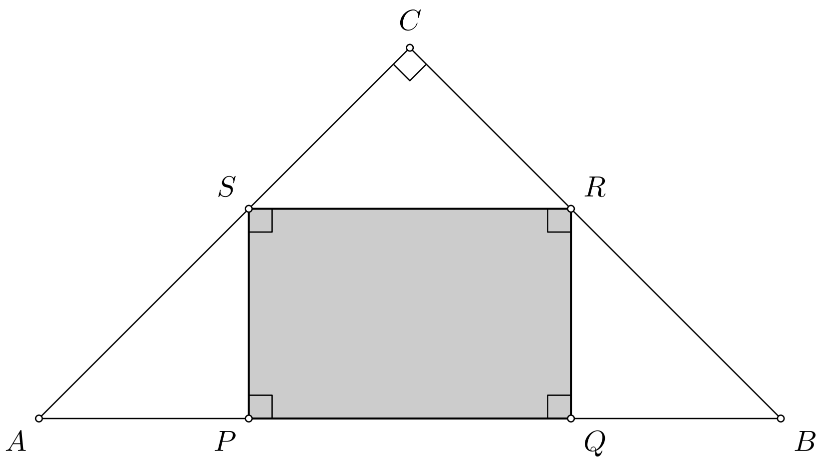
Zadatak A-2.1.

Dan je jednakokračni pravokutni trokut čije su katete duljine 10. Odredi najveću moguću površinu pravokutnika čija jedna stranica leži na hipotenuzi, a po jedan vrh na katetama danog trokuta.

Rješenje.

Pomoću Pitagorinog poučka iz $|AC| = |BC| = 10$ zaključujemo $|AB| = 10\sqrt{2}$.

Neka je pravokutnik $PQRS$ upisan u trokut ABC na zadani način:



Označimo $|QR| = x$ i $|PQ| = y$.

Trokuti BRQ i APS su jednakokračni, pa imamo $|AP| = x$ i $|BQ| = x$. 1 bod

Odavde slijedi $2x + y = 10\sqrt{2}$. 1 bod

Sada možemo izraziti površinu pravokutnika preko x:

$$P(x) = xy = x \cdot (10\sqrt{2} - 2x) = 2x(5\sqrt{2} - x).$$ 3 boda

Funkcija $P(x)$ je kvadratna, a njen maksimum se postiže u apscisi tjemena $x = \frac{5}{2}\sqrt{2}$.

Zaključujemo da je najveća moguća površina jednaka 25. 5 bodova

Napomena: Jednom kad odredimo $P(x) = 2x(5\sqrt{2} - x)$, maksimum možemo odrediti koristeći A–G nejednakost

$$P(x) = 2x(x - 5\sqrt{2}) \leqslant \big(x + (5\sqrt{2} - x)\big)^2 = 25.$$

A–G nejednakost možemo primijeniti jer je $x \in [0, 5\sqrt{2}]$, pa su izrazi x i $5\sqrt{2} - x$ nenegativni.

Zadatak A-2.2.

Neka su kompleksni brojevi a, b i c rješenja jednadžbe $x^3 - 2x + 2 = 0$. Odredi

$$\frac{a+1}{a-1} + \frac{b+1}{b-1} + \frac{c+1}{c-1}.$$

Rješenje.

Koristimo Vièteove formule. Budući da su a, b i c rješenja jednadžbe $x^3 - 2x + 2 = 0$, imamo

$$a + b + c = 0, \quad ab + bc + ca = -2, \quad abc = -2.$$ 3 boda

Preostaje zadani izraz zapisati preko $a + b + c$, $ab + bc + ca$ i abc:

$$\begin{aligned}
\frac{a+1}{a-1} + \frac{b+1}{b-1} + \frac{c+1}{c-1} &= 1 + \frac{2}{a-1} + 1 + \frac{2}{b-1} + 1 + \frac{2}{c-1} \\
&= 3 + 2 \cdot \frac{(b-1)(c-1) + (a-1)(c-1) + (a-1)(b-1)}{(a-1)(b-1)(c-1)} \\
&= 3 + 2 \cdot \frac{(ab + bc + ca) - 2(a + b + c) + 3}{abc - (ab + bc + ca) + (a + b + c) - 1} \qquad \text{5 bodova} \\
&= 3 + 2 \cdot \frac{-2 - 0 + 3}{-2 - (-2) + 0 - 1} = 1. \qquad \text{2 boda}
\end{aligned}$$

Zadatak A-2.3.

Koliko ima uređenih parova prirodnih brojeva (m, k) za koje vrijedi

$$20m = k(m - 15k)\ ?$$

Prvo rješenje.

Izrazimo li m preko k dobivamo $m = \dfrac{15k^2}{k-20}$.

Odavde slijedi da je m prirodni broj ako i samo ako je $k > 20$ i $k - 20$ dijeli $15k^2$. 2 boda

Budući da je

$$\begin{aligned}
\frac{15k^2}{k-20} &= \frac{15k^2 - 20^2 \cdot 15 + 20^2 \cdot 15}{k-20} \\
&= \frac{15(k-20)(k+20) + 20^2 \cdot 15}{k-20} = 15(k+20) + \frac{6000}{k-20}, \qquad \text{3 boda}
\end{aligned}$$

m je prirodni broj ako i samo ako je $k > 20$ i $k - 20$ dijeli 6000. 2 boda

Budući da je $6000 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3$, svaki pozitivni djelitelj broja 6000 je oblika $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ pri čemu je $a \in \{0,1,2,3,4\}$, $b \in \{0,1\}$ i $c \in \{0,1,2,3\}$. Zato je broj djelitelja broja 6000 jednak $5 \cdot 2 \cdot 4 = 40$. 3 boda

Zaključujemo da traženih parova (m,k) ima 40.

Napomena: Ako učenik kao rješenja broji i one slučajeve kad je $k > 0$, a $k - 20$ je negativan djelitelj broja 6000 (u tom slučaju $m \leqslant 0$), može dobiti najviše 8 bodova.

Drugo rješenje.

Zadana jednadžba glasi $15k^2 - mk + 20m = 0$. Diskriminanta $D = m^2 - 4 \cdot 15 \cdot 20m$ te kvadratne jednadžbe u varijabli k mora biti kvadrat cijelog broja. 1 bod

Zato postoji nenegativni cijeli broj n takav da je $m^2 - 1200m = n^2$.

Nadopunjavanjem izraza $m^2 - 1200m$ do potpunog kvadrata dobivamo

$$(m - 600)^2 = n^2 + 360000,$$

a faktorizacijom

$$(m - 600 - n)(m - 600 + n) = 360000.$$ 1 bod

Možemo pisati

$$m - 600 - n = d_1,$$
$$m - 600 + n = d_2,$$

pri čemu za cijele brojeve d_1 i d_2 vrijedi $d_1 d_2 = 360000$. 1 bod

Zbrajanjem dobivamo $2m - 1200 = d_1 + d_2$. Zaključujemo da d_1 i d_2 moraju oba biti parni jer im je zbroj i umnožak paran broj. 1 bod

Primijetimo da d_1 i d_2 ne mogu biti negativni jer bi tada zbog A–G nejednakosti vrijedilo $2m = 1200 + d_1 + d_2 = 2\sqrt{d_1 d_2} + d_1 + d_2 \leqslant (-d_1) + (-d_2) + d_1 + d_2 = 0$, što je nemoguće za $m \in \mathbb{N}$. 1 bod

Budući da je n^2 diskriminanta jednadžbe $15k^2 - mk + 20m = 0$ možemo pisati

$$k_1 = \frac{m - n}{30}, \quad k_2 = \frac{m + n}{30}.$$

Dakle, ako postoji rješenje (m,k), onda 30 dijeli barem jedan od brojeva $m - n$ i $m + n$. Budući da je $m - n - 600 = d_1$ i $m + n - 600 = d_2$ zaključujemo da 30 dijeli barem jedan od brojeva d_1 i d_2. 1 bod

Budući da tražimo samo parove (m,k), dovoljno je prebrojati koliko ima pozitivnih djelitelja d_1 broja 360000 djeljivih s 30 takvih da je $d_2 = \dfrac{360000}{d_1}$ paran broj. 1 bod

Svaki takav d_1 možemo zapisati u obliku $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ pri čemu je $a \in \{1,2,3,4,5\}$, $b \in \{1,2\}$ i $c \in \{1,2,3,4\}$. Dakle, takvih brojeva ima $5 \cdot 2 \cdot 4 = 40$. 3 boda

Zadatak A-2.4.

Na kružnici k nalaze se točke A i B, a na manjem luku $\widehat{AB}$ točka P. Neka su Q i R točke na k, različite od P, takve da je $|AP| = |AQ|$ i $|BP| = |BR|$. Neka je T sjecište pravaca AR i BQ. Dokaži da su pravci PT i AB međusobno okomiti.

Rješenje.

Koristit ćemo jednakost obodnih kutova nad istim lukom te jednakost kutova u jednakokračnim trokutima APQ i BPR.

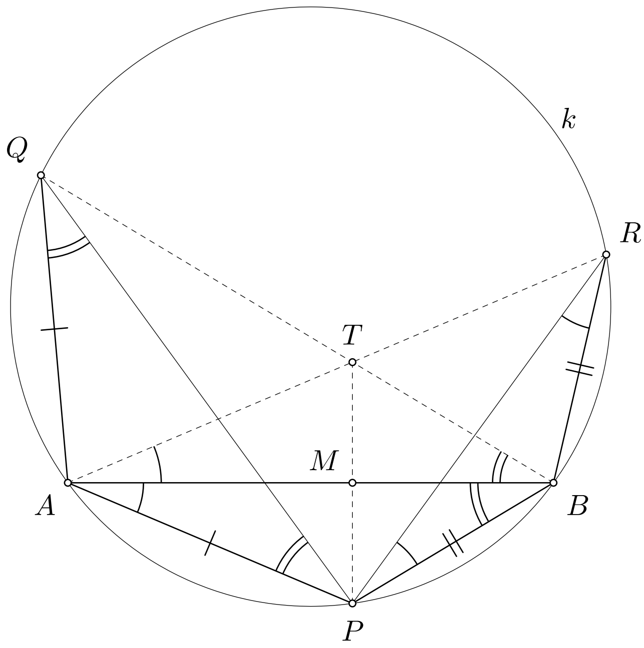
Vrijedi

$$\sphericalangle PAB = \sphericalangle PRB = \sphericalangle RPB = \sphericalangle RAB = \sphericalangle TAB,$$ 3 boda

i analogno,

$$\sphericalangle PBA = \sphericalangle PQA = \sphericalangle QPA = \sphericalangle QBA = \sphericalangle TBA.$$ 1 bod

Ovo znači da trokuti ABP i ABT sa zajedničkom stranicom $\overline{AB}$ imaju dva para jednakih odgovarajućih kutova, pa su ti trokuti sukladni. 1 bod



Neka se PT i AB sijeku u točki M. Trokuti AMP i AMT imaju zajedničku stranicu $\overline{AM}$, sukladne kutove $\sphericalangle PAM = \sphericalangle TAM$ i sukladne stranice $|PA| = |TA|$ (slijedi iz prethodno dokazane sukladnosti trokuta ABP i ABT). Prema S-K-S teoremu o sukladnosti, trokuti AMP i AMT su sukladni. 3 boda

To znači da je $\sphericalangle PMA = \sphericalangle TMA$, a kako je zbroj tih kutova 180° mora biti $AM \perp PT$. Time je tvrdnja dokazana. 2 boda

Napomena: Nakon dokazane sukladnosti trokuta ABP i ABT dovoljno je uočiti da su točke P i T osnosimetrične s obzirom na pravac AB te da iz toga slijedi $PT \perp AB$.

Zadatak A-2.5.

Polja ploče 2×50 potrebno je obojati u dvije boje, crvenu i plavu, tako da budu zadovoljeni sljedeći uvjeti:

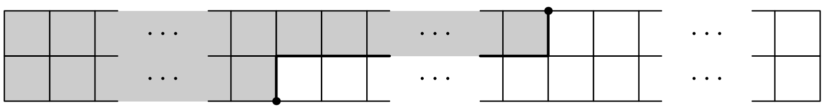
- na ploči se pojavljuju obje boje
- uklanjanjem svih crvenih polja ploča ostaje povezana
- uklanjanjem svih plavih polja ploča ostaje povezana.

Ploča je povezana ako se od svakog polja može doći do svakog drugog, prelazeći u svakom koraku s polja na njemu susjedno polje. Polja su susjedna ako imaju zajedničku stranicu.

Na koliko je načina to moguće napraviti?

Prvo rješenje.

Crvena polja čine jedno povezano područje, a plava polja drugo povezano područje. Ta dva područja su odvojena (izlomljenom) linijom kojoj su krajnje točke na rubu ploče, a svi ostali dijelovi u unutrašnjosti ploče. 1 bod



Na rubu ploče imamo 104 točaka koje su i vrhovi polja. Od tih 104 točaka, nijedan od četiri vrha ploče ne može biti krajnja točka spomenute izlomljene linije. 1 bod

Dakle, krajnje točke moramo odabrati između preostalih 100 točaka ruba. Dvije od 100 točaka možemo odabrati na $\frac{100 \cdot 99}{2}$ načina. 5 bodova

Izlomljena linija kojoj su svi dijelovi osim krajnjih točaka u unutrašnjosti ploče je jedinstveno određena odabirom krajnjih točaka. 2 boda

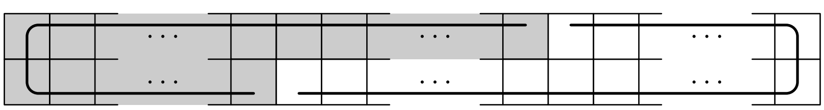
Jednom kad je izlomljena linija odabrana na 2 načina možemo odabrati kako ćemo obojati područja. Zato je traženi broj bojanja ploče $2 \cdot \frac{100 \cdot 99}{2} = 9900$. 1 bod

Drugo rješenje.

Promotrimo poizvoljno bojanje ploče koje zadovoljava uvjete zadatka.

Obilazimo li polja ploče kružno, tj. tako prvo obiđemo sva polja prvog retka s lijeva na desno, pa nakon toga sva polja drugog retka s desna na lijevo itd., točno ćemo jednom prijeći s crvenog polja na susjedno plavo i točno jednom s plavog polja na susjedno crveno. 3 boda

Kad prelazimo s crvenog polja na plavo nazovimo ta polja završno crveno i početno plavo polje. Analogno, kad prelazimo s plavog polja na crveno polje nazovima ta polja završno plavo i početno crveno polje.



Svako bojanje koje zadovoljava uvjete zadatka jedinstveno je određeno početnim crvenim i početnim plavim poljem. 2 boda

Početno crveno polje možemo odabrati na 100 načina, a početno plavo možemo odabrati na 99 načina. Zato je konačan rezultat je $100 \cdot 99 = 9900$. 5 bodova

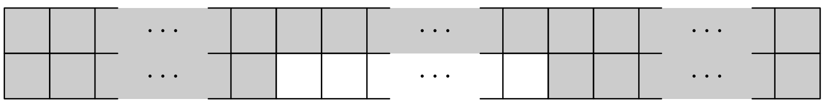
Treće rješenje.

Prebrojimo ona bojanja za koja je gornje lijevo polje ploče plavo. Ukupan broj bojanja će biti jednak dvostrukom dobivenom broju.

Razlikujemo dva slučaja, ovisno o tome je li donje desno polje crveno ili plavo.

Ako je donje desno polje ploče plavo, onda sva polja u prvom retku moraju biti plava ili sva polja u drugom retku moraju biti plava. Ta dva podslučaja su simetrična.

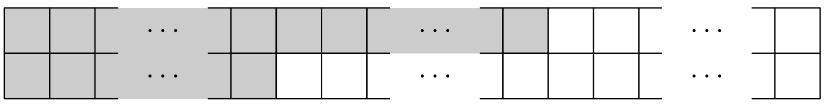
Ako su sva polja u prvom retku plava, onda crvena polja čine povezan niz polja u drugom retku. Za povezan niz polja u jednom retku ćemo reći da je blok. Bojanje je određeno stupcima u kojima je prvo i zadnje polje crvenog bloka.



Neka je prvo polje bloka u i-tom stupcu, a zadnje polje bloka u j-tom stupcu. Tada par (i, j) zadovoljava $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant 49$. Parova u kojima je $i = j$ ima 49, a parova za koje je $1 \leqslant i < j \leqslant 49$ ima $\frac{49 \cdot 48}{2} = 49 \cdot 24$, pa je ukupan broj takvih parova $49 \cdot 25$. 3 boda

Budući da imamo dva podslučaja s jednakim brojem bojanja, u ovom slučaju (donje desno polje je plavo) je ukupan broj bojanja $49 \cdot 50$. 1 bod

Ako je donje desno polje ploče crveno, onda plava polja u svakom retku čine blok na početku retka, a crvena polja čine blok na kraju retka.



U prvom retku je broj plavih polja najmanje 1, a najviše 50. U drugom retku je broj plavih polja najmanje 0, a najviše 49. Zato je ukupan broj bojanja u ovom slučaju $50 \cdot 50$. 4 boda

Ukupan broj bojanja u kojima je gornje lijevo polje ploče plavo je

$$49 \cdot 50 + 50 \cdot 50 = 99 \cdot 50.$$ 1 bod

Zato je ukupan broj svih bojanja $99 \cdot 50 \cdot 2 = 9900$. 1 bod

Četvrto rješenje.

Razlikujemo sljedeće slučajeve:

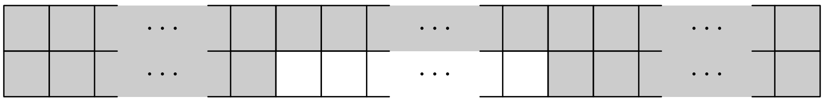
1. Sva četiri kutna polja ploče su iste boje.

   Broj stupaca u sredini, koji sadrže i plava i crvena polja, može biti:

   - 1 – taj stupac možemo izabrati na 48 načina (ne može biti prvi ni zadnji)
   - 2 – te stupce možemo izabrati na 47 načina (ne mogu biti prva dva ni zadnja dva)

   ⋮

   - 28 – te stupce možemo izabrati na 1 način (jedina mogućnost je da to budu svi stupci osim prvog i zadnjeg).

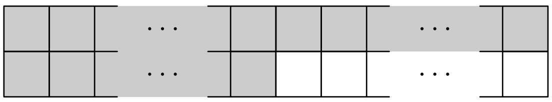
   Crvena polja mogu biti u donjem ili gornjem retku, pa rezultat množimo s 2. Boju kutnih polja možemo odabrati na 2 načina, pa zato množimo još jednom s 2. Stoga ukupan broj mogućnosti za ovaj slučaj iznosi

   $$2 \cdot 2 \cdot (48 + 47 + \cdots + 1) = 4 \cdot \frac{48 \cdot 49}{2} = 4704.$$ 2 boda

2. Tri kutna polja su jedne boje, a četvrto polje je druge boje.

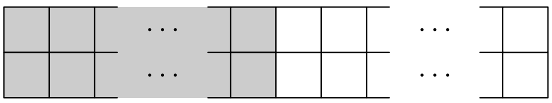
   Broj stupaca u kojima su oba polja iste boje možemo izabrati na 49 načina. U ostalim stupcima je jedno plavo i jedno crveno polje. Na 2 načina možemo odabrati koje boje će biti tri kutna polja, te kutno polje koje će biti druge boje možemo odabrati na 4 načina. Zato ukupan broj mogućnosti iznosi $2 \cdot 4 \cdot 49 = 392$.

   2 boda

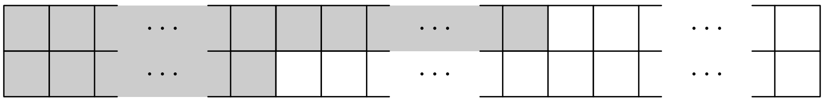
   

3. Dva kutna polja ploče su plava, a dva su crvena.

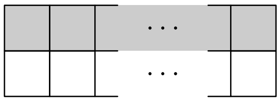
   (a) Neka su istobojna kutna polja u istom stupcu i svi stupci su jednobojni. Tada na 49 način možemo odabrati broj stupaca u jednoj boji. Imamo 2 mogućnosti za odabir boje u prvom stupcu, pa je rezultat u ovom slučaju $2 \cdot 49 = 98$. 2 boda

   (b) Ako u sredini imamo stupce kojima su polja različite boje, onda kao u prvom slučaju, središnje stupce možemo izabrati na $\frac{48 \cdot 49}{2}$ načina. Boju prvog stupca možemo odabrati na 2 načina, a na 2 načina možemo odabrati jesu li polja različite boje u prvom ili drugom retku. Zato je rezultat u ovom slučaju $2 \cdot 2 \cdot \dfrac{48 \cdot 49}{2} = 4704.$ 2 boda



(c) Ako su istobojna kutna polja u istom retku, onda su oba retka jednobojna i imamo samo dvije mogućnosti. 1 bod



Ukupan broj mogućnosti je

$$4704 + 392 + 98 + 4704 + 2 = 9900.$$ 1 bod

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

23. veljače 2016.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-3.1.

Neka su x i y realni brojevi takvi da vrijedi $\sin x + \sin y = \frac{1}{3}$. Dokaži da vrijedi

$$\sin(3x) + \sin(3y) \leqslant \frac{26}{27}.$$

Prvo rješenje.

Formula za sinus trostrukog kuta glasi $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, pa je

$$\sin 3x + \sin 3y = 3(\sin x + \sin y) - 4(\sin^3 x + \sin^3 y).$$ 2 boda

Zbog jednostavnijeg zapisa, uvedimo oznake $a = \sin x$ i $b = \sin y$.

Uvrštavanjem $b = \frac{1}{3} - a$ dobivamo

$$3(a+b) - 4(a^3+b^3) = 1 - 4 \cdot \left(a^2 - \frac{1}{3}a + \frac{1}{27}\right),$$ 3 boda

tj. dovoljno je dokazati

$$1 - 4 \cdot \left(a^2 - \frac{1}{3}a + \frac{1}{27}\right) \leqslant \frac{26}{27}.$$ 1 bod

Posljednja nejednakost je ekvivalentna nejednakosti

$$36a^2 - 12a + 1 \geqslant 0.$$

Budući da je $36a^2 - 12a + 1 = (6a-1)^2 \geqslant 0$, dokaz je gotov. 4 boda

Drugo rješenje.

Kao i u prvom rješenju zaključujemo

$$\sin 3x + \sin 3y = 3(\sin x + \sin y) - 4(\sin^3 x + \sin^3 y),$$ 2 boda

te uvodimo oznake $a = \sin x$ i $b = \sin y$.

Budući da je $a + b = \frac{1}{3}$, dovoljno je dokazati $4(a^3 + b^3) \geqslant \frac{1}{27}$. 1 bod

Dokazat ćemo da je

$$4(a^3+b^3) - (a+b)^3 \geqslant 0.$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} 4(a^3+b^3)-(a+b)^3 &= 3(a^3+b^3)-3a^2b-3ab^2 && \text{1 bod} \\ &= 3(a+b)(a^2-ab+b^2)-3ab(a+b) \\ &= 3(a+b)(a^2-2ab+b^2). && \text{2 boda} \end{aligned}$$

Prema uvjetu zadatka vrijedi $a+b=\frac{1}{3}$, pa je

$$4(a^3+b^3)-(a+b)^3 = 3(a+b)(a^2-2ab+b^2) = (a-b)^2 \geqslant 0. \qquad \text{4 boda}$$

Time je dokaz završen.

Napomena: Brojevi $a=\sin x$ ili $b=\sin y$ ne moraju oba biti pozitivni. Ako učenik u nekom dijelu dokaza koriste da su a i b oba pozitivni brojevi treba ostvariti 1 bod manje.

Napomena: Kao dokaz nejednakosti $4(a^3+b^3) \geqslant (a+b)^3$ učenik može napisati da je ta nejednakost ekvivalentna s nejednakosti između potencijalnih sredina reda 3 i 1 (sredina reda je 1 je naravno aritmetička sredina):

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \geqslant \frac{a+b}{2},$$

koja vrijedi za sve realne brojeve a i b takve da je $a+b \geqslant 0$. Učenik koji ne obraća pažnju na uvjet $a+b \geqslant 0$ (tj. ne obraća pažnju na mogućnost da a i b nisu oba pozitivni brojevi) treba ostvariti 1 bod manje.

Zadatak A-3.2.

Odredi sve parove prirodnih brojeva (a,b) takve da vrijedi

$$\begin{aligned} a^3-3b&=15, \\ b^2-a&=13. \end{aligned}$$

Napomena: Jedino rješenje zadanog sustava je $(a,b)=(3,4)$. Ako učenik napiše da je par $(a,b)=(3,4)$ rješenje zadanog sustava, ali ne napiše niti jedan drugi zaključak koji donosi bodove, treba dobiti ukupno 1 bod.

Prvo rješenje.

Zbrojimo li jednadžbe dobivamo

$$a^3-a+b^2-3b=28. \qquad \text{1 bod}$$

Za $a \geqslant 4$ je $a^3-a \geqslant 64$, te vrijedi $b^2-3b \geqslant -2$ za sve prirodne brojeve b, pa mora vrijediti $a \leqslant 3$. 5 bodova

Ako je $a=1$, onda dobivamo kvadratnu jednadžbu $b^2-3b=28$ koja nema rješenja u prirodnim brojevima. 1 bod

Ako je $a = 2$, onda dobivamo kvadratnu jednadžbu $b^2 - 3b = 22$ koja nema rješenja u prirodnim brojevima. 1 bod

Ako je $a = 3$, onda dobivamo kvadratnu jednadžbu $b^2 - 3b = 4$, koja ima jedno prirodno rješenje $b = 4$ (drugo je $b = -1$). 1 bod

Dakle, par $(a, b) = (3, 4)$ je rješenje jednadžbe koju dobivamo zbrajanjem jednadžbi zadanog sustava.

Budući da je $3^3 - 3 \cdot 4 = 15$ i $4^2 - 3 = 13$, vidimo da je par $(a, b) = (3, 4)$ rješenje zadanog sustava. 1 bod

Napomena: Alternativno, iz $a^3 - a + b^2 - 3b = 28$, možemo zaključiti da je $b \leqslant 4$. Taj zaključak tada nosi 4 boda (dok zaključak $a \leqslant 3$ nosi 5 bodova). Svaki od slučajeva $b = 1$, $b = 2$ i $b = 3$ nosi 1 bod. Zaključak da uz $b = 4$ mora biti $a = 3$ nosi 1 bod, a provjera da par $(a, b) = (3, 4)$ zadovoljava obje jednadžbe sustava nosi također 1 bod.

Drugo rješenje.

Iz prve jednadžbe zaključujemo da je a djeljivo s 3, tj. možemo pisati $a = 3k$ za $k \in \mathbb{N}$. 1 bod

Prva jednadžba postaje $b = 9k^3 - 5$, pa uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobivamo

$$(9k^3 - 5)^2 - 3k = 13,$$

odnosno

$$27k^6 - 30k^3 - k + 4 = 0.$$ 1 bod

Budući da je k prirodni broj, zaključujemo da k dijeli 4. 4 boda

Nadalje, iz gornje jednadžbe vidimo da $-k + 4$ mora biti djeljivo s 3, pa k ne može biti ni 2 ni 4. 2 boda

Ako je $k = 1$, onda je $a = 3k = 1$ i $b = 9k^3 - 5 = 4$. Dakle, $(a, b) = (3, 4)$ je rješenje prve jednadžbe. 1 bod

Za $k = 1$, izraz $27k^6 - 30k^3 - k + 4$ je jednak 0, tj. $(a, b) = (3, 4)$ je i rješenje druge jednadžbe. Dakle, $(a, b) = (3, 4)$ je rješenje zadanog sustava. 1 bod

Napomena: Učenik može slučajeve $k = 2$ i $k = 4$ odbaciti uvrštavanjem $a = 3k$ i $b = 9k^3 - 5$ u sustav. Odbacivanje svakog od tih slučajeva zasebno nosi 1 bod.

Treće rješenje.

Iz druge jednadžbe možemo izraziti $a = b^2 - 13$ i uvrstiti u prvu jednadžbu. Dobivamo

$$(b^2 - 13)^3 - 3b = 15.$$ 1 bod

Nakon sređivanja dobivamo

$$b^6 - 3 \cdot 13 \cdot b^4 + 3 \cdot 13^2 \cdot b^2 - 3b = 13^3 + 15.$$

Budući da je b prirodni broj, b dijeli $13^3 + 15 = 2212$. 2 boda

Rastavimo 2212 na proste faktore: $2212 = 2^2 \cdot 7 \cdot 79$. 1 bod

Dakle, za svaki od 12 prirodnih djelitelja b broja 2212 moramo provjeriti je li $(b^2 - 13, b)$ rješenje prve jednadžbe zadanog sustava, tj. je li $3b + 15 = (b^2 - 13)^3$.

Sljedeća tablica prikazuje vrijednosti izraza $3b+15$ pri čemu je b pozitivni djelitelj broja 2212.

b	1	2	4	7	14	28	79	158	316	553	1106	2212
$3b+15$	18	21	27	36	57	99	252	489	963	1674	3333	6651

Iz te tablice vidimo da je izraz $3b+15$ kub nekog prirodnog broja samo ako je $b=4$. 4 boda

Tada je $a = b^2 - 13 = 3$. Dakle, par $(3,4)$ je rješenje druge jednadžbe. 1 bod

Također, $3b+15 = 27 = a^3$, tj. par $(3,4)$ je rješenje i prve jednadžbe. Dakle, par $(a,b) = (3,4)$ je rješenje zadanog sustava. 1 bod

Napomena: Kako bismo provjerili da $3b+15$ nije potpun kub za veće djelitelje b broja 2212 možemo promotriti vrijednosti potpunih kubova u relevantnom intervalu:

n	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...	18	19
n^3	216	343	512	729	1000	1331	1728	2197	2744	3375	...	5832	6859

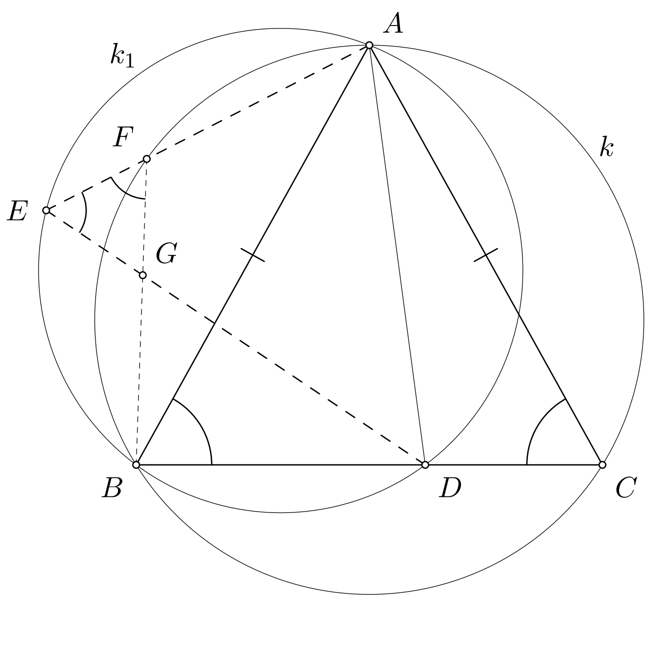
Zadatak A-3.3.

Jednakokračni trokut ABC ($|AB| = |AC|$) upisan je u kružnicu k. Neka je D točka na osnovici $\overline{BC}$ tog trokuta, k_1 kružnica opisana trokutu ABD i E točka na kružnici k_1. Pretpostavimo da pravac AE siječe kružnicu k u točkama A i F tako da F leži između A i E. Ako se pravci DE i BF sijeku u točki G, dokaži da vrijedi $|EG| = |GF|$.

Rješenje.

Budući da točke A, B, C i F leže na jednoj kružnici, zaključujemo

$$\sphericalangle GFE = 180^\circ - \sphericalangle GFA = \sphericalangle BCA.$$ 3 boda



Budući da točke A, B, D i E leže na jednoj kružnici, zaključujemo

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle AED = \sphericalangle GEF.$$ 3 boda

Kako je $|AB| = |AC|$, slijedi $\sphericalangle GFE = \sphericalangle BCA = \sphericalangle ABD = \sphericalangle GEF$. 3 boda

Zbog $\sphericalangle GFE = \sphericalangle GEF$ vrijedi $|EG| = |GF|$. 1 bod

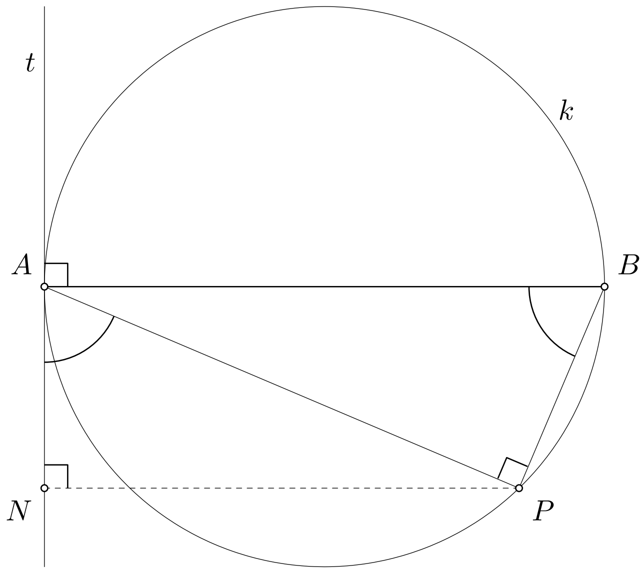
Zadatak A-3.4.

Neka je k kružnica s promjerom $\overline{AB}$ i t tangenta kružnice k s diralištem u točki A. Neka je P bilo koja točka na kružnici k i neka je N ortogonalna projekcija točke P na pravac t.

Odredi kut $\sphericalangle ABP$ za koji izraz $|PB| + |PN|$ ima najveću moguću vrijednost.

Rješenje.

Označimo $|AB| = 2R$ i $\sphericalangle ABP = \varphi$.



Trokut ABP je pravokutan jer je $\overline{AB}$ promjer kružnice, pa vrijedi $|PB| = 2R\cos\varphi$ i $|PA| = 2R\sin\varphi$. 1 bod

Uočimo da je $\sphericalangle PAN = 90^\circ - \sphericalangle PAB = \sphericalangle PBA = \varphi$, pa je

$$|PN| = |PA| \sin\sphericalangle PAN = 2R\sin\varphi \cdot \sin\varphi = 2R\sin^2\varphi.$$ 2 boda

Tražimo najveću moguću vrijednost izraza

$$\begin{aligned}|PB| + |PN| &= 2R\cos\varphi + 2R\sin^2\varphi \\ &= 2R\left(\cos\varphi + \sin^2\varphi\right) \\ &= 2R\left(1 + \cos\varphi - \cos^2\varphi\right).\end{aligned}$$ 2 boda

Ovo je kvadratna funkcija u varijabli $\cos\varphi \in [-1, 1]$ i njen maksimum se postiže u tjemenu, tj. za $\cos\varphi = \frac{1}{2}$. 4 boda

Traženi kut je $\varphi = 60^\circ$. 1 bod

Zadatak A-3.5.

Promatramo sve pravokutne ploče čija je polja moguće obojati tako da u svakom retku bude točno 14 plavih polja, u svakom stupcu točno 10 crvenih polja i da na cijeloj ploči budu točno 3 polja koja nisu ni crvena ni plava.

Odredi dimenzije takve ploče koja ima najmanji ukupan broj polja.

Rješenje.

Neka je r broj redova, a s broj stupaca promatrane ploče.

Ukupan broj polja je jednak zbroju broja plavih polja, broja crvenih polja i broja polja koja nisu ni plava ni crvena:

$$rs = 14r + 10s + 3.$$

2 boda

Dobivenu jednadžbu možemo zapisati na sljedeći način

$$(r-10)(s-14) = 143.$$

2 boda

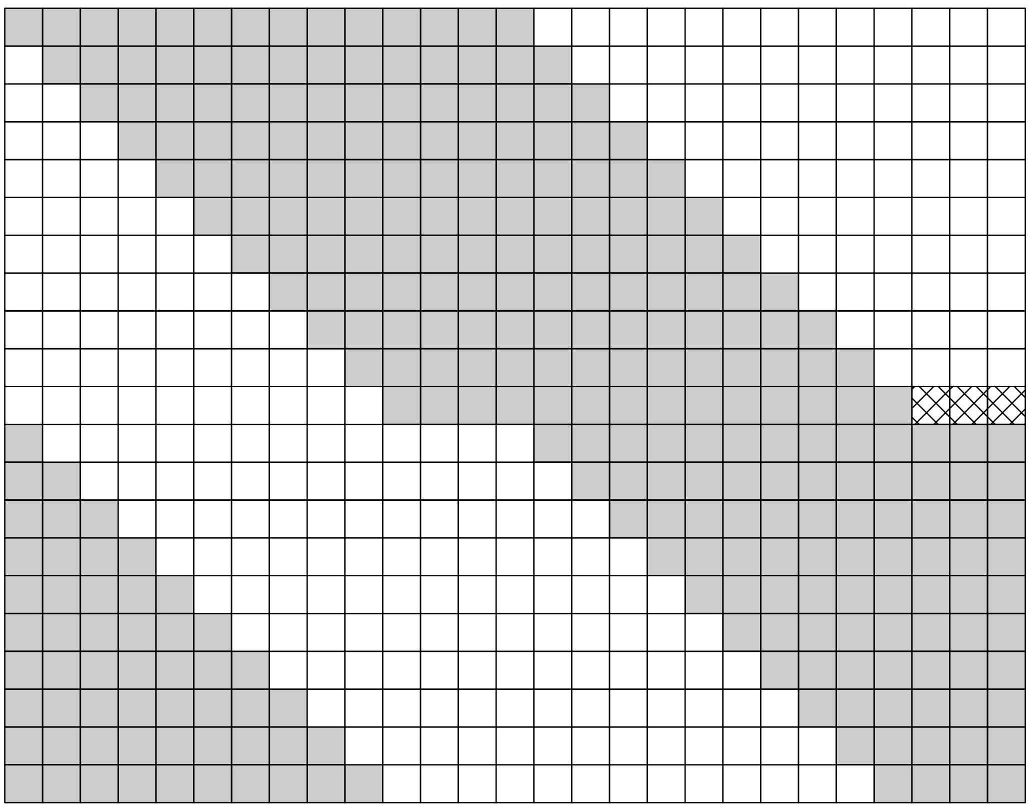
Budući da je $143 = 11 \cdot 13$, imamo četiri mogućnosti

$$\begin{array}{cccc} r-10=1, & r-10=11, & r-10=13, & r-10=143 \\ s-14=143; & s-14=13; & s-14=11; & s-14=1. \end{array}$$

2 boda

Ukupan broj polja, rs, je najmanji ako je $(r,s) = (21, 27)$. 1 bod

Preostaje primjerom pokazati da je zaista moguće na traženi način obojati pravokutnu ploču dimenzija 21×27. Jedan takav primjer je dan na slici. 3 boda



ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

23. veljače 2016.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-4.1.

Neka su $a_0, a_1, \ldots, a_n$ realni brojevi takvi da je

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = (x+1)^3 (x+2)^3 \cdots (x+672)^3.$$

Odredi zbroj

$$a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{2016}.$$

Rješenje.

Označimo $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = (x+1)^3 (x+2)^3 \cdots (x+672)^3$. To je polinom stupnja $3 \cdot 672 = 2016$.

Uočimo da je

$$\begin{aligned} P(1) &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2014} + a_{2015} + a_{2016}, \\ P(-1) &= a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + a_{2014} - a_{2015} + a_{2016}. \end{aligned}$$

Zbrajanjem dobivamo

$$P(1) + P(-1) = 2a_0 + 2a_2 + \ldots + 2a_{2014} + 2a_{2016}.$$ 2 boda

Kako je $a_0 = P(0)$, vrijedi

$$a_2 + a_4 + \ldots + a_{2016} = \frac{1}{2}\left(P(1) + P(-1)\right) - P(0).$$ 4 boda

Računamo:

$$P(0) = 1^3 \cdot 2^3 \cdot \cdots \cdot 672^3 = (672!)^3,$$ 1 bod

$$P(1) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot \cdots \cdot 673^3 = (673!)^3,$$ 1 bod

$$P(-1) = 0$$ 1 bod

i konačno dobivamo

$$a_2 + a_4 + \ldots + a_{2016} = \frac{1}{2}\left(P(1) + P(-1)\right) - P(0) = \frac{1}{2}(673!)^3 - (672!)^3.$$ 1 bod

Zadatak A-4.2.

Dokaži da za svaki prirodni broj $n \geqslant 3$ postoji n različitih prirodnih brojeva čiji je zbroj recipročnih vrijednosti jednak 1.

Prvo rješenje.

Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom.

Za $n = 3$ vrijedi $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$. 1 bod

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$, tj. pretpostavimo da postoje međusobno različiti prirodni brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_k$ takvi da je

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_k} = 1.$$ 1 bod

Uočimo

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_k} \right) = \frac{1}{2a_1} + \frac{1}{2a_2} + \ldots + \frac{1}{2a_k}$$ 4 boda

Očito su $a_1, a_2, \ldots, a_n > 1$, pa su brojevi $2, 2a_1, 2a_2, \ldots, 2a_{k-1}, 2a_k$ međusobno različiti. 2 boda

To znači da postoji $k+1$ prirodnih brojeva s traženim svojstvom:

$$2,\ 2a_1,\ 2a_2,\ 2a_3,\ \ldots,\ 2a_{k-1},\ 2a_k$$

tj. tvrdnja vrijedi za $n = k+1$. 1 bod

Po principu matematičke indukcije zaključujemo da tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n. 1 bod

Drugo rješenje.

Tvrdnju ćemo dokazati matematičkom indukcijom. Točnije, dokazat ćemo tvrdnju: za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoje prirodni brojevi $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, takvi da je a_n paran broj i da vrijedi

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} = 1.$$ 1 bod

Za $n = 3$ takvi brojevi su $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 6$. 1 bod

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$, tj. pretpostavimo da postoje međusobno različiti prirodni brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_k$, takvi da je

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_k} = 1$$

pri čemu je najveći od tih brojeva, a_k, paran. 1 bod

Vrijedi $\frac{1}{a_k} = \frac{2}{3a_k} + \frac{1}{3a_k} = \frac{1}{\frac{3a_k}{2}} + \frac{1}{3a_k}$.

Zato je

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{k-1}} + \frac{1}{\frac{3a_k}{2}} + \frac{1}{3a_k} = 1.$$ 3 boda

Kako je broj a_k paran, $\frac{3a_k}{2}$ je prirodni broj. 1 bod

Uočimo još da su zbog

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_{k-1} < a_k < 3 \cdot \frac{a_k}{2} < 3a_k,$$

svi nazivnici u gornjem zbroju međusobno različiti, 1 bod

te da je nazivnik najmanjeg razlomka, broj $3a_k$ paran. 1 bod

Time smo dokazali da tvrdnja vrijedi i za $n = k + 1$.

Po principu matematičke indukcije zaključujemo da tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n. 1 bod

Treće rješenje.

Tvrdnju ćemo dokazati matematičkom indukcijom s korakom 2. To znači da dokazujemo: ako tvrdnja vrijedi za k, onda vrijedi i za $k+2$. Da bi takav dokaz bio korektan, bazu indukcije čine dva uzastopna broja.

Za $n = 3$ takvi su brojevi $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 6$. 1 bod

Za $n = 4$ uzmimo $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$, $a_4 = 12$ ili $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 9$, $a_4 = 18$. 1 bod

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n = k$, tj. pretpostavimo da postoje različiti prirodni brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_k$ takvi da je

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_k} = 1.$$ 1 bod

Neka je a_k najveći od brojeva a_i $(i = 1, \ldots, k)$. Vrijedi

$$\frac{1}{a_k} = \frac{1}{a_k} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2a_k} + \frac{1}{3a_k} + \frac{1}{6a_k}$$ 2 boda

što znači da pribrojnik $\frac{1}{a_k}$ možemo zamijeniti s ta tri pribrojnika, a zbroj se neće promijeniti. 1 bod

Uočimo još da su $2a_k$, $3a_k$ i $6a_k$ veći od svih brojeva a_i $(i = 1, \ldots, k-1)$, 2 boda

pa postoji $k+2$ međusobno različitih prirodnih brojeva s traženim svojstvom:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{k-1},\ 2a_k,\ 3a_k,\ 6a_k.$$ 1 bod

Dakle, tvrdnja vrijedi za $n = k + 2$.

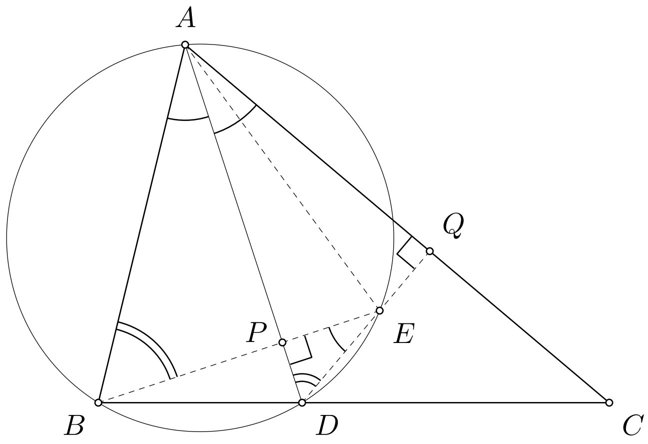
Po principu matematičke indukcije zaključujemo da tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n. 1 bod

Zadatak A-4.3.

U šiljastokutnom trokutu ABC u kojem je $|AB| < |AC|$, točka D leži na stranici $\overline{BC}$. Okomica iz točke B na pravac AD siječe kružnicu opisanu trokutu ABD u točkama B i E. Ako su pravci DE i AC međusobno okomiti, dokaži da je AD simetrala kuta $\sphericalangle BAC$.

Prvo rješenje.

Neka je P sjecište pravaca AD i BE, a Q sjecište AC i DE.



Budući da je točka E na opisanoj kružnici trokuta ABD slijedi $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BED$ (obodni kutovi nad tetivom $\overline{BD}$). 3 boda

Budući da je $\sphericalangle DPE = 90°$ slijedi $\sphericalangle BED = \sphericalangle PED = 90° - \sphericalangle EDP = 90° - \sphericalangle QDA$. 1 bod

Budući da je $\sphericalangle DQA = 90°$ slijedi $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DAQ = 90° - \sphericalangle QDA$. 1 bod

Dakle, $\sphericalangle BED = 90° - \sphericalangle QDA = \sphericalangle DAC$. 3 boda

Zaključujemo da je $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BED = \sphericalangle DAC$, tj. AD je simetrala kuta $\sphericalangle BAC$. 2 boda

Drugo rješenje.

Neka je P sjecište pravaca AD i BE, a Q sjecište AC i DE.

Budući da je točka E na opisanoj kružnici trokuta ABD slijedi

$$\sphericalangle ABP = \sphericalangle ABE = [\text{obodni nad lukom } AE] = \sphericalangle ADE = \sphericalangle ADQ. \qquad \text{3 boda}$$

Budući da je $\sphericalangle BPA = \sphericalangle DQA = 90°$, zaključujemo da trokuti ABP i ADQ imaju iste kutove. 4 boda

Stoga je $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BAP = \sphericalangle DAQ = \sphericalangle DAC$, tj. AD je simetrala kuta $\sphericalangle BAC$. 3 boda

Zadatak A-4.4.

Odredi sve parove cijelih brojeva (a, b) za koje vrijedi

$$(7a - b)^2 = 2(a - 1)b^2.$$

Rješenje.

Ako je $b = 0$, onda je $a = 0$ i to je jedno rješenje. Nadalje pretpostavimo da je $b \neq 0$.

Uočimo da $2(a-1)$ mora biti kvadrat cijelog broja. 1 bod

Zato možemo pisati $a - 1 = 2k^2$, tj. $a = 2k^2 + 1$ za neki cijeli broj k.

Tada je $7a - b = \pm 2kb$, tj. $7(2k^2+1) - b = \pm 2kb$. 2 boda

Budući da nismo zahtjevali da je $k > 0$, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $7(2k^2+1) - b = 2kb$.

Izrazimo li b preko k dobivamo

$$b = \frac{7(2k^2+1)}{2k+1}$$

Budući da b mora biti cijeli broj, $2k+1$ mora dijeliti $7(2k^2+1)$.

Kako je

$$2 \cdot 7(2k^2+1) = 2 \cdot 7(2k^2+1) - 7 + 7 = 7(4k^2-1) + 21 = 7(2k-1)(2k+1) + 21,$$ 3 boda

zaključujemo da $2k+1$ dijeli $7(2k^2+1)$ ako i samo ako $2k+1$ dijeli 21. 2 boda

Za svaki cijeli broj k za koji $2k+1$ dijeli 21, rješenje dane jednadžbe je

$$a = 2k^2 + 1, \quad b = \frac{7(2k^2+1)}{2k+1}.$$

Uz rješenje $(a, b) = (0, 0)$, imamo još 8 rješenja (po jedno za svaki pozitivni i negativni djelitelj broja 21) koja radi preglednosti zapisujemo kao trojke (k, a, b): $(0, 1, 7)$, $(1, 3, 7)$, $(3, 19, 19)$, $(10, 201, 67)$, $(-1, 3, -21)$, $(-2, 9, -21)$, $(-4, 33, -33)$, $(-11, 243, -81)$.
2 boda

Napomena: Ako učenik izostavi rješenje $(0,0)$ treba dobiti 1 bod manje.

Zadatak A-4.5.

Neka je n prirodni broj. Na koliko načina možemo tablicu $n \times n$ popuniti brojevima $1, 2, -1, -2$ tako da umnožak brojeva u svakom retku bude jednak -2 i da umnožak brojeva u svakom stupcu bude također jednak -2 ?

Rješenje.

Za $n = 1$, očito postoji jedan traženi način. Neka je nadalje $n > 1$.

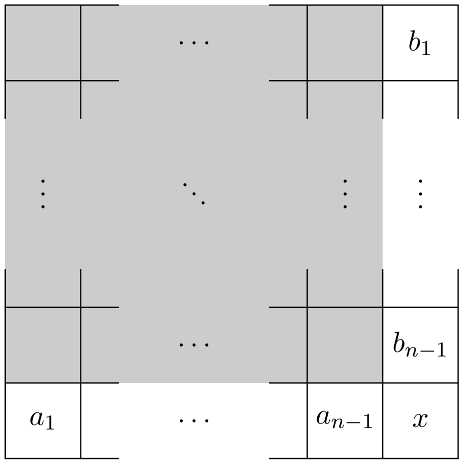
U svakom retku i svakom stupcu mora biti točno jedan od brojeva 2 ili -2. 1 bod

Možemo odvojeno odrediti na kojim mjestima u tablici će se nalaziti brojevi čija je apsolutna vrijednost 2 i na kojim mjestima u tablici će se nalaziti negativni brojevi.

Mjesta za brojeve koji imaju apsolutnu vrijednost 2 možemo odabrati na $n!$ načina. 2 boda

U svakom retku (odn. stupcu) možemo proizvoljno odabrati predznak za $n-1$ brojeva, a preostali broj ima jednoznačno određen predznak kako bi umnožak bio negativan. 1 bod

Neka je P dio promatrane tablice koji se sastoji od $(n-1)^2$ polja u prvih $n-1$ redaka i $n-1$ stupaca. Nadalje, označimo s x broj u n-tom retku i n-tom stupcu, s $a_1, \ldots, a_{n-1}$ preostale brojeve u n-tom retku, a s $b_1, \ldots, b_{n-1}$ preostale brojeve u n-tom stupcu.



Svaki raspored predznaka za koji je umnožak u svakom stupcu i svakom retku negativan u potpunosti je određen predznacima brojeva u P. 1 bod

Obratno, ako na proizvoljan način rasporedimo predznake brojeva u P, onda je zbog dosad napisanog jasno da su jednoznačno određeni predznaci brojeva

$$a_1, \ldots, a_{n-1}, b_1, \ldots, b_{n-1}.$$

Moramo još utvrditi možemo li predznak broja x namjestiti tako da umnožak i u n-tom retku i u n-tom stupcu bude negativan.

Predznak broja x mora biti suprotan od predznaka umnoška $a_1 a_2 \ldots a_{n-1}$, te mora biti suprotan od predznaka umnoška $b_1 b_2 \ldots b_{n-1}$. Dakle, potrebno je provjeriti da su predznaci umnožaka $a_1 a_2 \ldots a_{n-1}$ i $b_1 b_2 \ldots b_{n-1}$ jednaki.

Ako je n paran (odn. neparan), onda je umnožak svih brojeva u prvih $n-1$ stupaca negativan (odn. pozitivan). Zbog toga su umnožak $a_1 a_2 \ldots a_{n-1}$ i umnožak svih brojeva iz P suprotnog (odn. istog) predznaka ako je n paran (tj. neparan). Isto vrijedi za umnožak $b_1 b_2 \ldots b_{n-1}$, pa slijedi tvrdnja iz prethodnog odlomka. 2 boda

Dakle, broj traženih rasporeda predznaka u čitavoj tablici je jednak broju proizvoljnih rasporeda predznaka u P, a to je $2^{(n-1)^2}$. 2 boda

Konačan rezultat je $n! \cdot 2^{(n-1)^2}$. 1 bod