

RMM pripreme 2015 – Kombinatorika

sastavio: Borna Vukorepa

- 1. zadatak:** Zadano je 1000 utega, svi izgledaju isto, ali su svi različitih masa. Imamo vagu koja može usporediti dva utega i reći koji je teži. Možemo li odrediti i najteži i najlakši uteg u ukupno najviše 1500 koraka?
- 2. zadatak:** Za koje prirodne brojeve n je moguće odabrati n prirodnih brojeva (ne nužno različitih), svi između 1 i n , čiji je zbroj jednak $\frac{n(n+1)}{2}$, a umnožak $n!$ na barem dva različita načina?
- 3. zadatak:** Na ploči su prirodni brojevi $a, b, a+2, b+2$ pri čemu su a i b različiti. Zatim umjesto njih napišemo svih šest mogućih umnožaka od po dva ta broja. Koliko najviše može biti potpunih kvadrata na ploči u tom trenutku?
- 4. zadatak:** Neka je F familija podskupova skupa $\{1, 2, \dots, n\}$. Svi članovi familije F su tročlani skupovi i svaka dva različita elementa iz F imaju najviše jedan zajednički element. Neka je $f(n)$ najveći mogući broj elemenata iz F . Dokaži da je $\frac{n^2-4n}{6} \leq f(n) \leq \frac{n^2-n}{6}$.
- 5. zadatak:** Imamo $n > 1$ vagona s novčićima. Neki vagoni sadrže samo lažne, a neki samo prave novčiće. Poznata je masa pravog novčića i znamo da se masa lažnog razlikuje od nje. Imamo digitalnu vagu. Uz što manje vaganja odredi u kojim vagonima su lažni novčići i masu lažnog novčića. Svaki vagon ima beskonačno novčića.
- 6. zadatak:** Retci i stupci $3n \times 3n$ tablice su označeni brojevima $1, 2, \dots, 3n$ redom. Svako polje tablice obojano je nekom bojom (A, B ili C), ovisno o sumi koordinata retka i stupca modulo 3. Na svakom polju je neki žeton, boje A, B ili C (ne nužno iste boje kao pripadno polje tablice). Poznato je da ima $3n^2$ žetona svake boje. Pretpostavimo da možemo ispermutirati žetone tako da je svaki od svoje originalne pozicije udaljen za najviše d pri čemu žetoni boje A dolaze na mjesta žetona boje B , žetoni boje B na mjesta žetona boje C i žetoni boje C na mjesta žetona boje A . Pokaži da možemo žetone pomaknuti za udaljenost najviše $d+2$ tako da je svaki žeton na polju svoje boje. Udaljenost dva polja je zbroj udaljenosti redaka i stupaca.