# Jesenske pripreme 2015 – Nejednakosti za 8. i 1. r

sastavio: Ivan Krijan

**1. zadatak:** Neka su $x$ i $y$ realni brojevi, dokažite da je $x^2 + xy + y^2 \geq 0$.

**2. zadatak:** Neka su $x$ i $y$ realni brojevi, dokažite da je $3x(x + 2y) \leq (2x + y)^2$.

**3. zadatak:** Što je veće, $\sqrt{19} + \sqrt{99}$ ili $\sqrt{20} + \sqrt{98}$?

**4. zadatak:** Neka su $x$, $y$ i $z$ realni brojevi, dokažite da je $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$.

**5. zadatak:** (Nesbittova nejednakost) Neka su $a$, $b$ i $c$ pozitivni realni brojevi, dokažite da je

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

**6. zadatak:** (Županijsko 2009. A1 - 3) Neka su $x$ i $y$ pozitivni realni brojevi, dokažite da je

$$x^4 + y^3 + x^2 + y + 1 > \frac{9}{2}xy.$$

**7. zadatak:** (Državno 2009. A1 - 3) Neka su $x$, $y$ i $z$ pozitivni realni brojevi takvi da je $xyz = 1$, dokažite da je

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2} + \frac{y^3 + z^3}{y^2 + yz + z^2} + \frac{z^3 + x^3}{z^2 + zx + x^2} \geq 2.$$

**8. zadatak:** (Državno 2010. A1 - 2) Neka su $a$, $b$ i $c$ pozitivni realni brojevi takvi da je $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{2}$, dokažite da je

$$\frac{1 - a^2 + c^2}{c(a + 2b)} + \frac{1 - b^2 + a^2}{a(b + 2c)} + \frac{1 - c^2 + b^2}{b(c + 2a)} \geq 6.$$

**9. zadatak:** (Državno 2012. A1 - 2) Neka su $a$, $b$ i $c$ realni brojevi, dokažite da je

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(a - b + 1) \geq \frac{1}{3}(a + b + c)^2.$$

**10. zadatak:** (Državno 2013. A1 - 3) Neka su $a$ i $b$ duljine kateta te $c$ duljina hipotenuze pravokutnog trokuta, dokažite da je

$$\left(1 + \frac{c}{a}\right)\left(1 + \frac{c}{b}\right) \geq 3 + 2\sqrt{2}.$$

**11. zadatak:** (Županijsko 2014. A1 - 1) Neka su $a$, $b$ i $c$ realni brojevi takvi da je $a \leq b \leq c$, dokažite da je

$$c^2 - b^2 + a^2 \geq (c - b + a)^2.$$

**12. zadatak:** (Državno 2015. A1 - 3) Neka su $a$, $b$ i $c$ pozitivni realni brojevi takvi da je $a^2 + b^2 + c^2 = 3$, dokažite da je

$$\frac{a^4 + 3ab^3}{a^3 + 2b^3} + \frac{b^4 + 3bc^3}{b^3 + 2c^3} + \frac{c^4 + 3ca^3}{c^3 + 2a^3} \leq 4.$$

**13. zadatak:** Neka je $x$ realan broj, dokažite da je $\dfrac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 2$.

**14. zadatak:** Neka je $n$ prirodan broj te $a$ i $b$ pozitivni realni brojevi, dokažite da je

$$\sqrt[n+1]{ab^n} \leq \frac{a + nb}{n + 1}.$$

## Zadaci za samostalan rad

1. (Županijsko 2015. A1 - 1) Neka su $x$ i $y$ realni brojevi takvi da je $x - y \neq 0$ i $2xy + 1 \neq 0$, odredite odnos među brojevima

$$A = \frac{6x^2y^2 + xy - 1}{2xy + 1} \qquad \text{i} \qquad B = \frac{x(x^2 - 1) - y(y^2 - 1)}{x - y}.$$

2. Neka su $a$, $b$ i $c$ nenegativni realni brojevi, dokažite da je

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc.$$

3. Neka je $n$ prirodan broj te neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitivni realni brojevi takvi da je $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$, dokažite da je

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq 2^n.$$

4. Neka su $a$, $b$, $c$ i $d$ pozitivni realni brojevi, dokažite da je

$$\sqrt{(a + c)(b + d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$$

5. Neka su $a$, $b$ i $c$ realni brojevi, dokažite da je

   (a) $3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$,

   (b) $(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c)$.

6. Neka su $a$, $b$ i $c$ pozitivni realni brojevi, dokažite da je $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} \geq 3$.

7. Neka su $a$, $b$ i $c$ pozitivni realni brojevi, dokažite da je

$$\frac{a}{2a + b} + \frac{b}{2b + c} + \frac{c}{2c + 1} \leq 1.$$

8. Neka su $a$, $b$, $c$ i $d$ realni brojevi takvi da je $a + b + c + d = 4$, dokažite da je

$$ab + bc + cd + da \leq 4.$$