MEMO pripreme 2015. Vlatko Crnković, 11. 6. 2015.

Cevin i Menelajev teorem

0. Uvodna lemica: Neka je M presjek neparalelnih pravaca AB i PQ. Dokaži: $\frac{|PM|}{|QM|} = \frac{P_{ABP}}{P_{ABQ}}$.

1. Neka su D, E i F redom dirališta upisane kružnice sa stranicama BC, CA i AB trokuta $\triangle ABC$. Dokaži da se pravci AD, BE i CF sijeku u jednoj točki.

2. Na stranicama BC, CA i AB trokuta $\triangle ABC$ odabrane su točke D, E i F redom tako sa se pravci AD, BE i CF sijeku u jednoj točki. Pravci DE i DF sijeku pravac paralelan s BC kroz A u točkama P i Q. Dokaži da je $|AP| = |AQ|$.

3. Sinunsni oblik Ceva-inog teorema: Za raspored točaka kao i u Ceva-inom teoremu vrijedi da su pravci AD, BE i CF konkurentni ako i samo ako vrijedi $\frac{\sin(\angle ACF)}{\sin(\angle FCB)} \cdot \frac{\sin(\angle BAD)}{\sin(\angle DAC} \cdot \frac{\sin(\angle CBE)}{\sin(\angle EBA)} = 1$. Dokaži. Hint: poučak o sinusu: U trokutu $\triangle ABC$ vrijedi $\frac{|BC|}{\sin\alpha} = \frac{|CA|}{\sin\beta} = \frac{|AB|}{\sin\gamma}$.

4. Neka su α, β i γ kutevi proizvoljne veličine takvi da je zbroj bilo koja dva manji od 180°. Na stranama AB, BC i CA trokuta $\triangle ABC$ izvana su konstruirani trokuti $\triangle BDC$, $\triangle CEA$ i $\triangle AFB$ tako da su im kutovi pri vrhovima A, B i C redom α, β i γ. Dokaži da se pravci AD, BE i CF sijeku u jednoj točki.

5. Upisana kružnica trokuta $\triangle ABC$ dira stranice BC, CA i AB u točkama D, E i F. Na polupravcima ID, IE i IF (I je središte upisane kružnice) odabrane su točke A_1, B_1 i C_1 jednako udaljene od I. Dokaži da se pravci AA_1, BB_1 i CC_1 sijeku u istoj točki.

6. Na stranama AB, BC i CA trokuta $\triangle ABC$ odabrane su točke F, D i E redom. Neka je D_1 sjecište BC i pravca simetričnog pravcu AD s obzirom na simetralu kuta $\angle BAC$. Analogno definiramo i E_1 i F_1. Ako se AD, BE i CF sijeku u jednoj točki dokaži da se onda i AD_1, BE_1 i CF_1 sijeku u jednoj točki.

7. Nasuprotne stranice konveksnog šesterokuta su u parovima paralelne. Dokaži da se dužine koje spajaju polovišta nasuprotnih stranica sijeku u jednoj točki.

8. Menelajev teorem: Dan je trokut $\triangle ABC$. Na pravcima AB, BC i CA odabrane su redom točke F, D i E. Dokaži da D, E i F leže na istom pravcu ako i samo ako vrijedi $\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = -1$.

9. Na dijagonalama AC i CE pravilnog šesterokuta $ABCDEF$ odabrane su točke M i N redom takve da $\frac{|AM|}{|AC|} = \frac{|CN|}{|CE|} = r$. Odredi r ako su B, M i N kolinearne. ($IMO1982.$)

10. Na stranicama BC, CA i AB trokuta $\triangle ABC$ odabrane su točke D, E i F redom tako da se AD, BE i CF sijeku u jednoj točki. Neka je G sjecište pravaca AB i DE. Dokaži: $\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{|AG|}{|GB|}$.

11. Dan je pravokutan trokut $\triangle ABC$ s pravim kutom pri vrhu C. Neka je K nožište visine iz C na AB. E je sjecište AK i simetrale kuta $\angle KCA$, a F sjecište pravca CK i pravca kroz B paralelnog s CE. Dokaži da pravac FE prolazi kroz polovište dužine CA.

12. Kružnica S dira kružnice S_1 i S_2 u točkama A_1 i A_2 redom. Dokaži da pravac A_1A_2 prolazi ili sjecištem zajedničkih vanjskih ili zajedničkih unutarnjih tangenti na S_1 i S_2.

13. Na pravcima BC, CA i AB redom su odabrane kolinearne točke A_1, B_1 i C_1. Neka je A_2 točka koja leži na BC i na pravcu simetričnom pravcu AA_1 s obzirom na simetralu kuta $\angle BAC$. Analogno su definirane B_2 i C_2. Dokaži da A_2, B_2 i C_2 leže na istom pravcu.

14. Dani su trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle A_1B_1C_1$ takvi da su pravci AA_1, BB_1 i CC_1 konkurentni. Točke P, Q i R su redom sjecišta pravaca AB i A_1B_1, BC i B_1C_1 te CA i C_1A_1. Dokaži da su P, Q i R kolinearne. Ova tvrdnja je poznata kao Desarguesov teorem.

izvor zadataka: PROBLEMS IN PLANE AND SOLID GEOMETRY, Viktor Prasolov