MEMO pripreme 2015. Azra Tafro, 6. 6. 2015.

Dokazi u kombinatorici

Uvod

Na početku predavanja pričat ćemo o pristupu rješavanju zadataka općenito, a posebno logičko-kombinatornih zadataka. Nekoliko uputa:

- Napišite "očite" tvrdnje. Iako možda ne znate riješiti zadatak, tvrdnja koja vodi rješenju nosi parcijalne bodove.
- Provjerite vrijedi li vaš dokaz za trivijalne, rubne slučajeve itd.
- Zadatak koji treba dokazati za konkretan broj (recimo 2015) možda vrijedi općenito (za sve prirodne brojeve, za neparne brojeve itd.) - dokaz indukcijom?

Glavni problem u zapisivanju logičko-kombinatornih rješenja je uobličavanje ideja - mnoge stvari su nam "očite" ali ne znamo to formulirati. Zato ćemo se na jednostavnoj razini upoznati s različitim pristupima i tehnikama, kako bismo ih mogli uočiti u zadatku koji rješavamo.

- **Ekstremi** Uočimo neki minimalni/maksimalni element u zadatku i iz toga izvučemo zaključke (ili dođemo do kontradikcije).

  U ravnini je dano konačno mnogo crnih i bijelih točaka sa svojstvom da svaka dužina koja spaja istobojne točke sadrži točku druge boje. Dokažite da sve točke leže na istom pravcu.

- **Dvostruko prebrojavanje** Uočimo nešto što možemo prebrojati na dva različita načina te iz toga možemo nešto zaključiti o veličinama u zadatku.

  Svaki neusmjereni graf sadrži paran broj vrhova neparnog stupnja.

- **Invarijante** Uočimo element zadatka koji se ne mijenja neovisno o transformacijama koje se događaju (često u zadacima gdje "igramo igru", "mijenjamo boje" itd.).

  Tri igrača počinju igru sa 50, 100 *i* 150*kn. U svakoj igri jedan igrač pobjeđuje a preostala dvojica mu daju po kunu. Može li se tako dogoditi da u nekom trenutku svi imaju istu količinu novaca?*

- **Dirichletov princip**
- **Matematička indukcija**

Posljednja dva područja su glavna tema ovog predavanja, a vrlo često se u zadacima pojavljuje kombinacija dvije ili više tehnika.

Dirichletov princip

Ovaj vrlo jednostavni kombinatorni alat (poznat i kao *pigeonhole principle*) može se pojaviti kao pomoćni korak i u najsloženijim zadacima. Najpoznatiji oblik mu je tzv. "slaba forma":

Ako $n+1$ predmeta rasporedimo u n kutija, onda barem jedna kutija sadrži barem dva predmeta.

Općenito, princip se može izraziti i u tzv. "jakoj formi":

Ako m predmeta rasporedimo u n kutija, onda barem jedna kutija sadrži barem $\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor + 1$ predmeta.

Zadaci

1. Dokaži da u skupu od 10 različitih dvoznamenkastih brojeva postoje dva disjunktna podskupa čiji članovi imaju istu sumu.
2. Dano je $n+1$ prirodnih brojeva koji nisu veći od $2n$. Dokaži da postoje bar dva takva da je jedan djelitelj drugog.
3. Dano je $n+1$ različitih prirodnih brojeva strogo manjih od $2n$. Dokaži da među njima postoje tri takva da je jedan od njih jednak zbroju druga dva.
4. Dokaži da u konveksnom poliedru uvijek postoje dvije strane s jednakim brojem bridova. (Uputa: koristite i metodu ekstrema)
5. U sva polja tablice 100×100 upisani su brojevi $1, 2, \ldots, 100$ tako da se svaki pojavljuje točno 100 puta. Pokaži da postoji redak ili stupac u kojem ima barem 10 različitih brojeva. (Uputa: koristite i metodu dvostrukog prebrojavanja)

1 Matematička indukcija

Opći oblik:

Tvrdnja $T(n)$ vrijedi za svaki $n \geq n_0$ ako vrijedi tvrdnja $T(n_0)$ te ako iz $T(n)$ slijedi $T(n+1)$ za svaki n za koji je tvrdnja definirana.

Indukciju možemo koristiti i u alternativnom obliku, tako da umjesto pretpostavke da vrijedi $T(n)$ koristimo pretpostavku da vrijede svi $T(n_0), \ldots, T(n)$. Uočite da je ta tvrdnja samo na prvi pogled "jača", a zapravo je ekvivalentna općem obliku. Modificirane principe možemo koristiti i za dokazivanje tvrdnji koje vrijede za sve cijele brojeve, za (ne)parne brojeve, tvrdnje koje ovise o dva parametra (m, n) itd.

Ponekad indukcija nije očigledna, već početnu tvrdnju treba modificirati. Primjerice:

Dokaži da za sve $n \geq 1$ vrijedi $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \cdots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n}}$.

Standardni pristup dovest će nas do dokazivanja "pomoćne" tvrdnje $\frac{2n+1}{2(n+1)} \leq \frac{\sqrt{3n}}{3(n+1)}$ koja ne vrijedi. Međutim, ako početnu tvrdnju zamijenimo jačom tvrdnjom

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$$

potonju je lako dokazati standardnim pristupom (provjerite!).

Slično, ponekad zadatak na prvi pogled uopće nije moguće riješiti indukcijom. Primjerice:

Dokaži da za sve $n \geq 2$ *vrijedi* $\frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{3}{4}$.

Ovakvu tvrdnju očito ne možemo pokazati direktnim uvrštavanjem pretpostavke. Međutim, dodamo li s desne strane (nepoznati) član $a_n > 0$ dobivamo pomoćnu tvrdnju

$$\frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + a_n < \frac{3}{4}$$

iz koje slijedi početna. Uvrštavanjem baze i pretpostavke vidimo da niz (a_n) mora zadovoljavati $a_2 \leq 1/2$ i $a_n - a_{n+1} \geq 1/(n+1)^2$. Uočavamo da niz $a_n = 1/n$ zadovoljava te pretpostavke, a nejednakost

$$\frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} < \frac{3}{4}$$

je lako dokazati standardnom tehnikom matematičke indukcije.

Zadaci

1. Dokaži da za sve $n \geq 1$ vrijedi

$$\frac{1}{2\sqrt{1}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2.$$

   (Uputa: vidi prethodni primjer.)

2. Dokaži da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji n-znamenkasti broj s neparnim znamenkama koji je djeljiv s 5^n.

3. Dokaži da se svaki prirodan broj manji ili jednak $n!$ može prikazati kao suma najviše n različitih djelitelja broja $n!$.

4. Zadani su pozitivni realni brojevi $x_1, \dots, x_n$, $n \geq 4$, čija ukupna suma je 1. Dokaži da vrijedi $x_1x_2 + \dots + x_nx_1 \leq \frac{1}{4}$. (Napomena: ovu tvrdnju je lako dokazati algebarski, ali pokušajte indukcijom!)

5. Dokaži da za svaki $n > 3$ postoji konveksni poligon s n stranica koje nisu sve jednake takav da je suma udaljenosti bilo koje točke u unutrašnjosti do stranica mnogokuta konstantna. (Uputa: pokaži $T(n) \Rightarrow T(n+2)$ te provjeri tvrdnju za dva elementa baze, $n = 4$ i $n = 5$.)

6. Na pravokutnom stolu nalazi se nekoliko jednakih papirića kvadratnog oblika, svaki obojan u jednu od n boja, tako da su stranice kvadrata parelelne stranicama stola. Između svakih n kvadrata u različitim bojama moguće je naći dva koja se mogu pribiti za stol jednom pribadačom (tj. koja se preklapaju). Dokaži da postoji boja takva da je moguće pribiti sve papiriće te boje za stol koristeći $2n-2$ pribadače.

7. Od niza S_1 koji sadrži $n+1$ nenegativnih cijelih brojeva $a_0, \ldots, a_n$ možemo dobiti niz S_2 brojeva $b_0, \ldots, b_n$ takav da je b_i broj brojeva u nizu S_1 koji se nalaze prije a_i i različiti su od a_i (dakle $b_0 = 0$). Na isti način dobivamo niz S_3 od niza S_2 itd. Dokaži da, ako je $a_i \leq i$, vrijedi $S_n = S_{n+1}$.