Algoritmi i procesi

Zamjena identiteta

Primjer 1. (Mathematical Miniatures) Neka je n prirodni broj. U n različitih točaka duž kružne staze nalazi se n automobila. Svakom automobilu treba jedan sat da obiđe čitavu stazu. U istom trenutku svi automobili odabiru jedan od dva moguća smjera i kreću u odabranom smjeru. Kad se dva automobila susretnu oba promjene smjer i nastavljaju vožnju bez promjene brzine. Dokaži da će u nekom trenutku svi automobili istovremeno biti u svom početnom položaju.

Rješenje. Koristimo ideju zamjene identiteta kako bismo definirali modificirano kretanje automobila. Zamislimo da svaki automobil ima oznaku koja je broj od 1 do n, te da pri susretu automobili nastave kretanje u istom smjeru, ali zamjene svoje oznake. Pozicija na kojoj se nalazi oznaka nekog automobila u takvom modificiranom kretanju odgovara poziciji tog automobila u "stvarnom" kretanju opisanom u zadatku. Budući da bi u tom modificiranom kretanju nakon jednog sata svaki automobil došao na svoju početnu poziciju, ali potencijalno s nekom drugom oznakom, zaključujemo da će nakon jednog sata u stvarnom kretanju iz zadatku na svaku početnu poziciju doći neki automobil. Nadalje, u stvarnom kretanju iz zadatka automobili ne mogu zamijeniti mjesta, pa njihov poredak ostaje nepromijenjen. To znači da će se nakon jednog sata stvarnog kretanja raspored automobila samo zarotirati za k mjesta, pri čemu je k neki cijeli broj, uz $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Zaključujemo da će se nakon n sati raspored svih automobila zarotirati za nk mjesta, pa će se svi automobili naći na svojim početnim pozicijama. ■

Procesi i matematička indukcija

Primjer 2. (IMO Shortlist 2011) Neka je m prirodni broj. Promotrimo ploču dimenzija $m \times m$ sastavljenu od jediničnih kvadratića na kojoj se u središtima nekih kvadratića nalazi po jedan mrav. U trenutku 0 svi mravi se počinju kretati brzinom 1 u jednom od četiri smjera paralelna rubu ploče. Kad se dva mrava koja dolaze iz suprotnih smjerova susretnu svaki skrene za $90°$ ulijevo i nastavljaju se kretati istom brzinom. Ako se susretnu tri ili više mrava, ili ako se susretnu dva mrava koja dolaze iz okomitih smjerova, svi mravi nastavljaju svoje kretanje bez promjene. Kad mrav dođe do kraja ploče padne s nje i više se ne može vratiti.

Obzirom na sve moguće početne rasporede mrava, odredi najkasniji mogući trenutak u kojem će posljednji mrav pasti s ploče. ■

Rješenje. Započnimo primjerom. Ako na ploči imamo samo dva mrava koji se nalaze u donjem lijevom i donjem desnom kutu ploče i kreću se jedan prema drugome, onda će oni susresti u trenutku $\frac{m-1}{2}$, a mrav koji će nastaviti hodati prema gornjem dijelu ploče će pasti s ploče nakon $m-\frac{1}{2}$ vremena, tj. posljednji mrav će pasti u trenutku $\frac{3m}{2}-1$.

Pokažimo da bez obzira na početi raspored mrava, posljednji mrav će pasti najkasnije u trenutku $\frac{3m}{2} - 1$. Primijetimo da mrav obzirom na svoj smjer kretanja može hodati prema bližem ili prema daljem rubu ploče. Ako u nekom trenutku svi mravi hodaju prema bližem rubu ploče, onda se nikoja dva mrava više neće sresti i posljednji mrav će pasti s ploče najkasnije nakon $m/2$ vremena od tog trenutka.

Uvedimo koordinatni sustav tako da je središte ploče ishodište koordinatnog sustava i da su koordinatne osi paralelne rubovima ploče. Tvrdimo da nakon $k - 1$ vremena, za cijeli broj k takav da je $1 \leq k \leq m$, ne postoji mrav koji hoda prema daljem rubu ploče i koji se nalazi izvan kvadrata S_k omeđenog pravcima $x + y = m - k$, $x + y = -(m - k)$, $x - y = m - k$ i $x - y = -(m - k)$. Tvrdnja za $k = m$, povlači da nakon $m - 1$ vremena nema mrava koji hoda prema daljem rubu ploče. Zajedno s prethodnim paragrafom, to povlači da će posljednji mrav pasti najkasnije u trenutku $\frac{3m}{2} - 1$.

Tvrdnju dokazujemo indukcijom po k. Za $k = 1$ tvrdnja je očita jer se nijedan mrav na početku ne može nalaziti u pravokutnim trokutima s katetom duljine 1 u samim kutevima ploče zato što su mravi na početku u središtima kvadratića. Pretpostavimo da je tvrdnja točna za neki k, $1 \leq k < m$ i pretpostavimo da se u trenutku $k + 1$ mrav nalazi izvan kvadrata S_{k+1} te se kreće prema daljem rubu ploče. Zbog simetrije, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da se mrav nalazi u gornjem lijevom dijelu ploče i da se kreće udesno. Ako se taj mrav u trenutku $k + 1$ nije susreo s mravom iz suprotnog smjera, onda se u trenutku k također kretao udesno i nalazio se lijevo od trenutnog položaja za 1. Ako se u trenutku $k + 1$ susreo s drugim mravom zbog čega je promijenio smjer, onda se u trenutku k kretao prema dolje i nalazio se iznad trenutnog položaja za 1. U svakom slučaju ako se u trenutku $k + 1$ nalazi izvan kvadrata S_{k+1}, onda se u trenutku k nalazio izvan kvadrata S_k i kretao se prema daljem rubu, što je u suprotnosti s induktivnom pretpostavkom. Time je tvrdnja dokazana. ■

Pohlepni algoritmi

U sljedećih nekoliko zadataka ćemo komentirati pohlepne algoritme. To su algoritmi u kojima se svakom koraku odabire najbolji mogući odabir u tom trenutku, bez obzira vodi li to na kraju do optimalne situacije. Kroz primjere želimo pokazati da pohlepni algoritmi nekad vode do optimalne situacije, ali prije svega naglasiti da to nekad nije istina. Svaki algoritam mora imati početak, opis koraka, te mora biti jasno da algoritam staje u konačno mnogo koraka.

Primjer 3. Neka su n i d prirodni brojevi i neka je G graf s n vrhova. Stupanj svakog vrha grafa G iznosi najviše d. Dokaži da je sve vrhove grafa G moguće obojati u $d + 1$ boja tako da susjedni vrhovi nemaju istu boju.

Rješenje. Ideju za rješenje možemo dobiti bojanjem vrhova u malim primjerima, no nakon toga je potrebno smisliti formalni dokaz koji pokazuje tvrdnju za proizvoljni općeniti graf G.

Prvo ćemo vrhove poredati tako da svakom broju od 1 do n pridružimo neki vrh. Također, nazovimo boje 1, 2, ..., d. Opisat ćemo algoritam za bojanje vrhova i dokazati da njegovom provedbom zaista dobivamo bojanje kakvo se traži u zadatku.

U prvom koraku obojajmo vrh koji je pridružen broju 1 bojom 1. U svakom koraku algoritma među svim neobojanim vrhovima odabiremo onaj vrh X koji je pridružen najmanjem broju. Budući da je stupanj vrha X najviše d, postoji jedna od $d+1$ boja kojom nije obojan nijedan od susjed vrha X. Odaberimo neku takvu boju i u nju obojajmo vrh X. Primijetiti da je ključno bilo iskoristiti uvjet zadatka kako bismo uopće opisali algoritam. Ovaj algoritam možemo smatrati primjerom pohlepnog algoritma jer u svakom trenutku bojamo neobojani vrh koji je pridružen najmanjem prirodnom broju.

Preostaje provjeriti da se ovim algoritmom dobiva bojanje u kojem svaka dva susjedna vrha imaju različitu boju. U ovom slučaju to slijedi direktno iz opisa algoritma. Neka su A i B dva susjedna vrha i pretpostavimo da smo vrh A obojali prije vrha B. Prema algoritmu B smo obojali u boju koja je različita od boje kojom je obojan A. Time je dokaz završen. ■

Primjer 4. (Rusija 2005) Neka je n prirodni broj. U tablici dimenzija $2 \times n$ nalaze se pozitivni realni brojevi tako da je u svakom od n stupaca zbroj dva broja jednak 1. Dokaži da iz svakog stupca možemo odabrati po jedan broj tako da je zbroj odabranih brojeva u svakom retku najviše $\dfrac{n+1}{4}$.

Rješenje. Prvo ćemo komentirati da "naivni" pohlepni algoritam ne daje traženi odabir. Jedan primjer pohlepnog algoritma je algoritam kojim u svakom koraku odabiremo manji broj iz stupca. Taj algorirtam ne daje traženi odabir kao što pokazuje sljedeći primjer. Ako u tablici 2×5 su prvom retku u svim poljima piše 0.4 (a u drugom retku 0.6), onda će ovaj algoritam odabrati sve brojeve iz prvog retka i suma u tom retku će iznositi

$$0.4 \cdot 5 = 2 > \frac{5+1}{4} = \frac{3}{2}.$$

Evo modifikacije koja dovodi do ispravnog odabira. Kako bismo što jednostavnije zapisali rješenje primijetimo da bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su elementi u prvom retku sortirani od manjeg prema većem. Zaista, u zadatku se promatra samo ukupan zbroj odabranih brojeva u svakom retku, pa se eventualnom zamjenom stupaca istinitost tvrdnje vezane uz taj zbroj neće promijeniti. Neka su u prvom retku brojevi $a_1 \leqslant 2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. Odaberimo brojeve na sljedeći način: iz prvog retka odaberimo prvih k brojeva tako da nije moguće odabrati $k+1$ brojeva, a iz drugog retka odaberimo brojeve u preostalih $n-k$ stupaca.

Dakle, iz prvog retka smo odabrali brojeve $a_1, \ldots, a_k$ takve da vrijedi

$$a_1 + \ldots + a_k \leqslant \frac{n+1}{4} \quad \text{i} \quad a_1 + \ldots + a_k + a_{k+1} > \frac{n+1}{4}.$$

Iz ovih nejednakosti slijedi

$$\frac{n+1}{4} < a_1 + \ldots + a_{k+1} \leqslant (k+1)a_{k+1}, \quad \text{tj.} \quad a_{k+1} > \frac{n+1}{4(k+1)}$$

Preostaje pokazati da zbroj odabranih brojeva u drugom retku također nije veći od $\dfrac{n+1}{4}$. Ti brojevi su $1 - a_{k+1}, \ldots, 1 - a_n$. Njihov zbroj možemo ograničiti na sljedeći način

$$\begin{aligned}1-a_{k+1}+\ldots+1-a_n &= n-k-(a_{k+1}+\ldots+a_n)\\ &\leqslant n-k-(n-k)a_{k+1}\\ &< (n-k)\left(1-\frac{n+1}{4(k+1)}\right).\end{aligned}$$

Dokaz će biti gotov ako pokažemo

$$(n-k)\left(1-\frac{n+1}{4(k+1)}\right)\leqslant\frac{n+1}{4.}$$

No, direktnim računom se pokazuje da je ova nejednakost ekvivalentna nejednakosti $(n-2k-1)^2\geq 0$, što očito vrijedi. ■

Primjer 5. (IMO shortlist 2009) Pet identičnih praznih kanti kapaciteta 2 litre postavljeno je na vrhove pravilnog peterokuta. Pepeljuga i njena zla maćeha ponavljaju radnju u nizu krugova: na početku svakog kruga maćeha uzima jednu litru vode iz obližnje rijeke i raspodjeljuje vodu proizvoljno na pet kanti. Nakon toga Pepeljuga odabire dvije susjedne kante, isprazni ih u rijeku i vrati na početnu poziciju. Tada počinje novi krug. Maćeha želi postići da se jedna kanta prelije, a Pepeljuga to želi spriječiti. Može li zla maćeha ostvariti svoj cilj?

Rješenje. Odgovor je da zla maćeha ne može ostvariti svoj cilj. Prije nego to dokažemo, dat ćemo dva komentara koji bi mogli rješavatelja odvesti na krivi put u rješavanju ovog zadatka. Prvo, može se pokazati da maćeha može postići da je količina vode u jednoj kanti proizvoljno blizu 2 litre, ali maćeha ne može postići 2 litre ili više u jednoj kanti. Drugo, Pepeljuga neće spriječiti maćehu ako primjenjuje pohlepni algoritam kojim u svakom koraku izbaci vodu iz one dvije kante u kojima ima najviše vode.

Pokažimo kako Pepeljuga ipak može spriječiti maćehu u ostvarivanju njenog cilja. Dokazat ćemo da Pepeljuga može postići da prije mećehinog poteza dvije susjedna kante budu prazne, da se u kanti koja nije susjedna nijednoj od njih nalazi manje od 1 litre vode, te da se u preostale dvije kante zajedno nalazi manje od 1 litre vode.

Ta tvrdnja je očito istinita na početku kad su sve kante prazne. Nadalje, neka su u nekom trenutku prije maćehinog poteza količine vode u kantama $x_1, \ldots x_5$ i neka vrijedi $x_1=x_2=0$, $x_3+x_5<1$ i $x_4<1$. Neka su $y_1, \ldots, y_5$ količine vode u kantama nakon maćehinog sljedećeg poteza. Tada vrijedi

$$y_1+y_2+y_3+y_5\leqslant x_1+x_2+x_3+x_5+1<2.$$

Iz ovog zaključujemo da je $y_1+y_3<1$ ili $y_2+y_5<1$. Ako je $y_1+y_3<1$, Pepeljuga će isprazniti kante s količinima vode y_4 i y_5. Ako je $y_2+y_5<1$, Pepeljuga će isprazniti kante s količinima vode y_3 i y_4. U oba slučaja će svi uvjeti biti zadovoljeni. ■

Monovarijante

Primjer 6. Neka je n prirodni broj i neka je G graf s n vrhova. Dokaži da sve vrhove grafa G možemo obojati u dvije boje tako da svaki vrh ima barem pola susjednih vrhova različite boje od boje tog vrha.

Rješenje. Obojimo vrhove grafa G bilo kako. Neka je S broj parova susjednih vrhova koji su različito obojani. Ako postoji vrh koji ima više susjeda iste nego različite boje, promijenimo tom vrhu boju. Na taj način se broj S smanjio. Budući da je S prirodan broj, ovaj postupak ne možemo ponavljati beskonačno puta. Zato nakon konačno mnogo ponavljanja dolazimo u situaciju u kojoj taj postupak ne možemo provesti, a to znači da ne postoji vrh koji ima više susjeda iste nego različite boje. ■

Bipartitni grafovi i binarni zapis

Primjer 7. U nekoj državi svaka dva od ukupno 1025 povezana je (dvosmjernom) avionskom linijom jedne od 10 kompanija. Dokaži da postoji kompanija koja može ponuditi kružno putovanje s neparno mnogo gradova (kružno putovanje počinje i završava u istom gradu, a svaki drugi grad koji je uključen u putovanje se posjeti točno jednom).

Rješenje. Koristit ćemo sljedeću vrlo poznatu tvrdnju iz teorije grafova: graf je bipartitan ako i samo ako nema neparan ciklus.

Za svaku kompaniju možemo konstruirati graf kojem su vrhovi gradovi, a dva vrha su povezana ako su pripadni gradovi povezani avionskom linijom te kompanije. Ako pretpostavimo da nijedna kompanija ne može ponuditi kružno putovanje s neparno mnogo gradova, onda za svaku komapniju dobivamo bipartitan graf. Za svaki taj bipartitan graf jednu particiju označimo s 0, a drugu s 1. Svakom gradu možemo pridružiti riječ koja se sastoji od 10 znakova 0 ili 1, po jedan znak za svaku komapniju, ovisno o tome kojoj particiji za određenu komapniju taj grad pripada. Primijetimo da gradovi pripadaju istoj particiji, tj. na određenom mjestu u riječi imaju isti znak ako i samo ako ih pripadna kompanija ne povezuje. Iz toga zaključujemo da nikoja dva grada nemaju istu pridruženu riječ jer bi to značilo da ih nijedna kompanija ne povezuje. No, broj takvih riječi je $2^{10} = 1024$, pa prema Dirichletovom principu neka dva grada moraju imati istu pridruženu riječ. Dakle, dobili smo kontradikciju, što znači da pretpostavka da ne postoji kompanije koja nudi putovanje s neparno mnogo gradova nije točna. ■

Igre i binarni zapis

Primjer 8. (IMO shortlist 2004) Neka je N prirodni broj. Mirko i Slavko naizmjence pišu brojeve iz skupa $\{1, 2, \ldots, N\}$ na ploču. Mirko započinje igru zapisujući broj 1 u prvom potezu. Nakon toga, ako je u nekom potezu napisan broj n, u sljedećem potezu je dozvoljeno napisati $n+1$ ili $2n$ (ukoliko taj broj nije veći od N). Igrač koji napiše broj N je pobjednik. Kažemo da je broj N Mirkov (odn. Slavkov) ako Mirko (odn. Slavko) ima pobjedničku strategiju. Odredi je li 2014 Mirkov i nađi najmanji $N > 2014$ koji ne pripada istom igraču kao 2014.

Rješenje. U ovom rješenju ćemo analizirati pobjedničke i gubitničke pozicije na način na koji se to često radi u zadacima s igrama. Prvo ćemo promotriti slučaj $N = 2014$. Za broj n ćemo reći da je *pobjednički* ako igrač koji napiše n ima pobjedničku strategiju, tj. ako u svim preostalim potezima može odabrati brojeve koji ga dovode do pobjede bez obzira na poteze suparnika. Također, kažemo da je n *gubitnički* ako igrač koji napiše n ne može nakon toga pobjediti.

Uočimo da je n pobjednički ako i samo ako su svi brojevi koje suparnik može napisati nakon n gubitnički, te je n gubitnički ako i samo ako postoji barem jedan pobjednički broj koji se može napisati nakon n.

Analizirat ćemo koji su brojevi pobjednički, odn. gubitnički unatrag. Broj 2014 je pobjednički jer je po pravilima igre osoba koja napiše broj 2014 pobjednik. Broj 2013 je gubitnički jer će igrač koji piše nakon što je napisan broj 2013 moći napisati broj 2014 i tako pobijediti. Broj 2012 je pobjednički jer igrač koji piše nakon toga mora napisati 2013, što je gubitnički broj. Ovako možemo nastaviti zaključivati sve do 1007: parni brojevi 2014, 2012, ..., 1008 su pobjednički, a neparni brojevi 2013, 2011, ..., 1009 gubitnički. Nadalje, broj 1007 je gubitnički jer će suparnik moći napisati 2014 (ili 1008), što su oba pobjednički brojevi.

Zapravo, brojevi 1006, 1005, ..., 504 su gubitnički jer su njihove dvostruke vrijednosti pobjednički brojevi i suparnik može odgovoriti na n, $503 \leqslant n \leqslant 1006$, biranjem pobjedničkog broja $2n$.

Sada možemo analizirati sve brojeve od 503 do 252. Broj 503 je pobjednički jer suparnik mora napisati 504 ili 1006, što su oba gubitnički brojevi. Broj 502 je gubitnički jer suparnik nakon toga može napisati 503. Sličnim zaključivanjem slijedi da su svi parni brojevi 500, 498, ... 2 gubitnički, a neparni brojevi 501, ..., 3, 1 pobjednički. Zaista, nakon parnog broja n, $2 \leqslant n \leqslant 500$ suparnik može zapisati pobjednički broj $n+1$, a za neparni broj n, $1 \leqslant n \leqslant 501$, oba broja $n+1$ i $2n$ su gubitnička. Budući da smo zaključili da je 1 pobjednički broj, igrač koji igra prvi će pobjediti. Dakle, 2014 je Mirkov broj.

Na sličan način možemo analizirati situaciju za općeniti N. Broj N je pobjednički. Ako je N neparan broj, onda ćemo kao i u slučaju broja 503 zaključiti da su svi neparni brojevi pobjednički i svi parni brojevi gubitnički. Dakle, neparni brojevi su Mirkovi. Ako je N paran broj, onda prvo možemo zaključiti da je broj n, $\frac{1}{2}N \leqslant n \leqslant N$, pobjednički ako i samo ako je paran. Za brojeve n koji su manji od $\frac{1}{2}N$, a veći od $\lfloor \frac{1}{4}N \rfloor$, slijedi da su gubitnički. Također, broj $\lfloor \frac{1}{4}N \rfloor$ je pobjednički. Primijetite da nam nije važno je li broj $\frac{1}{2}N$ paran ili nije. No, ako je $\lfloor \frac{1}{4}N \rfloor$ neparan broj, onda zaključujemo da su svi manji neparni brojevi pobjednički i slijedi da je N Mirkov. S druge strane, ako je $\lfloor \frac{1}{4}N \rfloor$ paran broj, onda zaključujemo da su parni brojevi od $\lfloor \frac{1}{8}N \rfloor$ do $\lfloor \frac{1}{4}N \rfloor$ pobjednički, neparni brojevi u tom intervalu gubitnički, a svi brojevi n, $\lfloor \frac{1}{16}N \rfloor < n \leqslant \lfloor \frac{1}{8}N \rfloor$ gubitnički. Nastavimo li induktivno zaključivati slijedi da je N Slavkov ako i samo ako su N, $\lfloor \frac{1}{4}N \rfloor$, $\lfloor \frac{1}{16}N \rfloor$, ... parni brojevi. Ovaj kriterij možemo jednostavno formulirati ako koristimo binarni zapisa broja N. Naime, N je paran ako i samo ako je posljednja znamenka u binarnom zapisu broja N nula. Nadalje, $\lfloor \frac{1}{4}N \rfloor$ je paran broj ako i samo je treća znamenka od kraja u binarnom zapisu od N nula itd. Dakle, N je Slavkov ako i samo su sve znamenke na neparnim mjestima u binarnom zapisu broj N (brojeći od kraja) jednake nula (na znamenke na parnim mjestima nema nikakvog uvjeta).

Budući da $2014 = \overline{11111011100}_2$ počinje s dvije jedinice, prvi broj koji je Slavkov i koji je veći od 2014 je broj $2048 = \overline{100000000000}_2$.

$\blacksquare$

Zadaci za samostalan rad

1. (IMO Shortlist 2011) Skup od tri nenegativna cijela broja $\{x, y, z\}$, uz $x < y < z$, nazivamo *povijesnim* ako je $\{z - y, y - x\} = \{1991, 2015\}$. Dokaži da se skup svih nenegativnih cijelih brojeva može zapisati kao disjunktna unija povijesnih skupova.

2. (IMO shortlist 2009) Promotrimo 2009 karata pri čemu je svaka s jedne strane zlatna, a s druge strane plava, poredane u niz na dugom stolu. Na početku su sve karte okrenute tako da pokazuju zlatnu stranu. Dva igrača, koji stoje kraj iste dulje stranice stola, naizmjenično rade poteze. Svaki potez se sastoji od odabiranja 50 uzastopnih karata, pri čemu prva od tih 50 karata slijeva pokazuje zlatnu stranu, te okretanja tih 50 karata (karte koje su pokazivale zlatnu strana pokazuju plavu i obratno). Pobjednik je onaj igrač koji može odigrati zadnji potez.

   a) Mora li igra nužno završiti?
   b) Postoji li pobjednička strategija za prvog igrača?

3. (IMO Shortlist 2013) Na konačnom grafu G dozvoljeno je provoditi sljedeće operacije:

   (i) Odabrati vrh neparnog stupnja i ukloniti ga (zajedno sa svim bridovima koji iz njega izlaze).
   (ii) Dodati po jednu kopiju I' svakog vrha I grafa G, povezati kopiju I' s originalnim vrhom I, te povezati kopije I' i J' ako i samo ako su originalni vrhovi I i J povezani u G.

   Dokaži da se (počevši od bilo kojeg konačnog grafa G) primjenom dozvoljenih operacija može dobiti graf u kojem nikoja dva vrha nisu povezana.

4. (Shortlist 1999) Biolog promatra kameleona. Kameleon lovi muhe i odmara se nakon svakog ulova. Biolog je primijetio:

   - Prvu muhu je kameleon ulovio nakon odmora od jedne minute.
   - Odmor prije ulova $2m$-te muhe je jednak odmoru prije ulova m-te muhe, a minutu je kraći od odmora prije ulova $(2m + 1)$-ve muhe.
   - Kad prestane s odmorom, kameleon uhvati muhu u istom trenutku.

   (a) Koliko je muha kameleon uhvatio prije prvog odmora od 9 minuta?
   (b) Nakon koliko minuta će kameleon uhvatiti 98. muhu?
   (c) Koliko je muha kameleon uhvatio do 2015. minute od početka promatranja?

5. Na tavanu se nalazi 1000 staklenki koje sadrže razne količine pekmeza, ali nijedna ne sadrži više od $\frac{1}{100}$ ukupne količine pekmeza u svim staklenkama. Svakog dana potrebno je odabrati 100 staklenki, te se iz svake treba pojesti ista količina pekmeza. Dokaži da je moguće pojesti sav pekmez u konačno mnogo dana.

Riješite i zadatke IMO 2011/2 (vjetrenjače), IMO 2011/4 (utezi), IMO 2010/5 (konstrukcija), IMO 2009/6 (indukcija).

Hintovi

1. Opišite pohlepni algoritam koji uzima najmanje moguće brojeve.
2. a) Koristite binarni zapis. b) Promotrite svaku 50. kartu.
3.
4. Koristite binarni zapis kako biste opisali duljine odmora.
5. Dokažite tvrdnju indukcijom. Nikad ne zaboravite na tu metodu!!!

Dodatni izvori zadataka

- Alexander Remorov, Russian-style Problems (http://www.mit.edu/ alexrem/MiscellaneousProblems.pdf)
- Matija Bašić, Brojevne baze
- Viktor Prasolov, Problems in plane and solid geometry
- IMO Shortlist