Nestandardna algebra

Zadatak 1. Neka je P polinom stupnja $n \geqslant 2$ s cjelobrojnim koeficijentima takav da su mu nultočke različite i u intervalu $\langle 0,1\rangle$. Neka je a vodeći koeficijent polinoma P. Dokaži da je $|a| \geqslant 2^n+1$.

Rješenje: Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0,1)$ međusobno različite nultočke polinoma

$$P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n).$$

Primijetimo da je $P(0)P(1) = (-1)^n \cdot a^2 \prod_{i=1}^n [x_i(1-x_i)]$, odakle je

$$(-1)^n P(0)P(1) = a^2 \prod_{i=1}^n [x_i(1-x_i)].$$

Budući da su nultočke polinoma P međusobno različite, primjenom G-A nejednakosti dobivamo

$$(-1)^n P(0)P(1) = a^2 \prod_{i=1}^n [x_i(1-x_i)] < a^2 \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

odakle je $a^2 > 2^{2n} \cdot (-1)^n P(0)P(1)$.

S obzirom na to da su koeficijenti polinoma P cjelobrojni, vrijedi $P(0), P(1) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Ako je n paran, onda $P(0)$ i $P(1)$ imaju isti predznak; a ako je n neparan, $P(0)$ i $P(1)$ imaju različit predznak. Međutim, u oba slučaja vrijedi $(-1)^n P(0)P(1) > 0$, odnosno $(-1)^n P(0)P(1) \geq 1$ pa je konačno $a^2 > 2^{2n}$, odnosno $|a| \geq 2^n + 1$. $\square$

Zadatak 2. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i $b_1, b_2, \ldots, b_n$ različiti realni brojevi. U matricu $n \times n$ je na mjestu (i,j) napisan broj $a_i + b_j$. Ako znamo da je umnožak elemenata u svakom retku jednak, dokažite da je i umnožak elemenata u svakom stupcu jednak.

Rješenje: Umnožak elemenata u i-tom retku iznosi

$$(a_i+b_1)(a_i+b_2)\cdots(a_i+b_n)$$

i možemo ga promatrati kao vrijednost polinoma

$$f(x) = (x+b_1)(x+b_2)\cdots(x+b_n)$$

u točki $x = a_i$. Iz uvjeta zadatka znamo da je

$$f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_n) = c,$$

za neku konstantu c. To znači da su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nultočke polinoma $f(x) - c$. Budući da je taj polinom stupnja n to su mu sve nultočke. Slijedi

$$\begin{aligned}(x+b_1)(x+b_2)\cdots(x+b_n) - c &= f(x) - c \\ &= (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n).\end{aligned}$$

Ako sad uvrstimo $x = -b_j$, dobit ćemo da je

$$(-1)^n(b_j+a_1)(b_j+a_2)\cdots(b_j+a_n) = f(-b_j) - c = -c,$$

odnosno umnožak elemenata u j-tom stupcu iznosi $(-1)^{n+1}c$ za svaki $j = 1, 2, \ldots, n$. $\square$

Zadatak 3. Neka je $f : (0,1) \to (0,1)$ funkcija definirana s

$$f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & \text{ako} \quad x < \frac{1}{2}, \\ x^2 & \text{ako} \quad x \geqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Neka su a i b realni brojevi takvi da je $0 < a < b < 1$. Definiramo nizove a_n i b_n realnih brojeva na sljedeći način:

$$a_0 = a,\ b_0 = b \quad \text{i} \quad a_n = f(a_{n-1}),\ b_n = f(b_{n-1}) \quad \text{za} \quad n > 0.$$

Dokažite da postoji prirodan broj n takav da je

$$(a_n - a_{n-1})(b_n - b_{n-1}) < 0.$$

Rješenje: Uočimo prvo da je

$$f(x) - x = \frac{1}{2} > 0 \quad \text{za} \quad x < \frac{1}{2},$$

i

$$f(x) - x = x^2 - x < 0 \quad \text{za} \quad x \geqslant \frac{1}{2}.$$

Stoga, ako interval $(0,1)$ podijelimo da dva disjunktna podintervala, $I_1 = (0, \frac{1}{2})$ i $I_2 = [\frac{1}{2}, 1)$, nejednakost

$$(a_n - a_{n-1})(b_n - b_{n-1}) = \big(f(a_{n-1}) - a_{n-1}\big)\big(f(b_{n-1}) - b_{n-1}\big) < 0$$

će vrijediti ako i samo ako a_{n-1} i b_{n-1} leže u različitim podintervalima (jedan u I_1, a jedan u I_2).

Pretpostavimo suprotno, tj. da a_k i b_k leže uvijek u istom podintervalu. Označimo njihovu udaljenost s d_k ($d_k = |a_k - b_k|$). Ako a_k i b_k oba leže u I_1, onda je

$$d_{k+1} = |a_{k+1} - b_{k+1}| = |a_k + \frac{1}{2} - b_k - \frac{1}{2}| = d_k.$$

S druge strane, ako a_k i b_k oba leže u I_2 onda je $\min(a_k, b_k) \geqslant \frac{1}{2}$ i $\max(a_k, b_k) = \min(a_k, b_k) + d_k \geqslant \frac{1}{2} + d_k$, pa iz toga slijedi

$$d_{k+1} = |a_{k+1} - b_{k+1}| = |a_k^2 - b_k^2| = |(a_k - b_k)(a_k + b_k)| \geqslant |a_k - b_k|\big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + d_k\big) = d_k(1 + d_k) \geqslant d_k.$$

Time smo dobili da je niz razlika d_k neopadajući, i posebno $d_k \geqslant d_0 > 0$ za sve k. Možemo dobiti i jače tvrdnje.

Ako a_k i b_k oba leže u I_2, onda vrijedi

$$d_{k+2} \geqslant d_{k+1} \geqslant d_k(1 + d_k) \geqslant d_k(1 + d_0).$$

Ako pak a_k i b_k oba leže u I_1, onda a_{k+1} i b_{k+1} oba leže u I_2, pa vrijedi

$$d_{k+2} \geqslant d_{k+1}(1 + d_{k+1}) \geqslant d_{k+1}(1 + d_0) = d_k(1 + d_0).$$

U oba slučaja dobivamo $d_{k+2} \geqslant d_k(1 + d_0)$, iz čega induktivno slijedi

$$d_{2m} \geqslant d_0(1 + d_0)^{2m}.$$

Sada za dovoljno velike m vidimo da je desna strana gornje nejednakosti veća od 1, dok je s druge strane $d_{2m} < 1$ (jer a_m i b_m oba leže u intervalu $(0,1)$), što daje kontradikciju.

Time zaključujemo da je naša početna pretpostavka bila kriva, tj. postoji prirodan broj n takav da a_{n-1} i b_{n-1} ne leže u istom podintervalu i stoga vrijedi

$$(a_n - a_{n-1})(b_n - b_{n-1}) < 0.$$

□

Zadatak 4. Neka su $z_1, z_2, \ldots, z_n$ kompleksni brojevi takvi da je

$$|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n| = 1.$$

Dokaži da postoji podskup S skupa $\{z_1, \ldots, z_n\}$ takav da je

$$\left| \sum_{z \in S} z \right| \geq \frac{1}{6}.$$

Rješenje: Neka su l_1, l_2 i l_3 tri polupravca iz ishodišta koji zatvaraju s pozitivnim dijelom x-osi kuteve od $60°$, $180°$ i $300°$ redom.

Za $i = 1, 2, 3$ označimo s $\mathcal{R}_i$ područje između l_i i l_{i+1} (ovdje je $l_4 = l_1$), uključujući i polupravac l_i. Tada je

$$1 = \sum_{z_k \in \mathcal{R}_1} |z_k| + \sum_{z_k \in \mathcal{R}_2} |z_k| + \sum_{z_k \in \mathcal{R}_3} |z_k|.$$

Prema Dirichletovom principu barem jedna od tri gornje sume je $\geqslant 1/3$. Neka je to suma po $\mathcal{R}_3$ (ako nije ta, onda možemo rotirati što ne mijenja vrijednost modula kompleksnog broja). Neka je $z_k = x_k + iy_k$. Tada za $z_k \in \mathcal{R}_3$ vrijedi $x_k = |x_k| \geqslant |z_k|/2$. Slijedi

$$\Big| \sum_{z_k \in \mathcal{R}_3} z_k \Big| \geqslant \Big| \sum_{z_k \in \mathcal{R}_3} x_k \Big| \geqslant \frac{1}{2} \sum_{z_k \in \mathcal{R}_3} |z_k| \geqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

□

Rješenje: Dokazat ćemo jaču tvrdnju: postoji podskup S od $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ takav da je

$$\left| \sum_{z \in S} z \right| \geq \frac{1}{4}.$$

Za $k = 1, 2, \ldots, n$ neka je $z_k = x_k + iy_k$. Tada je

$$\begin{aligned} 1 &= |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| \\ &\leqslant (|x_1| + |y_1|) + (|x_2| + |y_2|) + \cdots + (|x_n| + |y_n|) \\ &= \sum_{x_k \geqslant 0} |x_k| + \sum_{x_k < 0} |x_k| + \sum_{y_k \geqslant 0} |y_k| + \sum_{y_k < 0} |y_k|. \end{aligned}$$

Prema Dirichletovom principu barem jedna od ove četiri sume je $\geqslant 1/4$. Zbog simetričnosti možemo pretpostaviti da je

$$\frac{1}{4} \leqslant \sum_{x_k \geqslant 0} |x_k| = \Big| \sum_{x_k \geqslant 0} x_k \Big|.$$

Slijedi

$$\Big| \sum_{x_k \geqslant 0} z_k \Big| \geqslant \Big| \sum_{x_k \geqslant 0} x_k \Big| \geqslant \frac{1}{4}.$$

□

Zadatak 5. Na ploči su zapisani brojevi $1000, 1001, \ldots, 2999$. U svakom koraku Borna može obrisati dva broja, recimo a i b, te napisati broj $\frac{1}{2}\min\{a, b\}$.

Nakon 1999 takvih operacija na ploči je ostao samo broj c. Dokaži da je $c < 1$.

Rješenje: Zbog simetričnosti možemo pretpostaviti da je $a \leqslant b$. Tada je

$$\frac{1}{2}\min(a, b) = \frac{a}{2} \qquad \text{i} \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)},$$

iz čega slijedi da je suma recipročnih vrijednosti brojeva na ploči neopadajuća (tj. suma je monovarijanta). Ako sa S označimo početnu sumu vrijedi

$$S = \frac{1}{1000} + \frac{1}{1001} + \cdots + \frac{1}{2999} \leqslant \frac{1}{c}.$$

Uočimo da za $1 \leqslant k \leqslant 999$ vrijedi

$$\frac{1}{2000 - k} + \frac{1}{2000 + k} = \frac{4000}{2000^2 - k^2} > \frac{4000}{2000^2} = \frac{1}{1000},$$

pa je

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} &\geqslant \frac{1}{1000} + \left(\frac{1}{1001} + \frac{1}{2999}\right) + \left(\frac{1}{1002} + \frac{1}{2998}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{1999} + \frac{1}{2001}\right) + \frac{1}{2000} \\ &> \frac{1}{1000} \times 1000 + \frac{1}{2000} > 1, \end{aligned}$$

iz čega slijedi da je $c < 1$. □

Zadatak 6. Dano je n kompleksnih brojeva z_k takvih da je $|z_k| \leq 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Dokaži da postoje $e_1, \ldots, e_n \in \{-1, 1\}$ takvi da za svaki $m \leq n$ vrijedi

$$|e_1 z_1 + e_2 z_2 + \ldots + e_m z_m| \leq 2.$$

Rješenje: Nazvat ćemo konačan niz kompleksnih brojeva *zelenim* ako su mu svi elementi po modulu $\leqslant 1$. Nazvat ćemo zeleni niz $\{z_k\}_{k=1}^n$ *sretnim* ako postoji *prijateljski* niz $\{e_k\}_{k=1}^n$ kojemu su svi elementi 1 ili -1 koji zadovoljava uvjete zadatka.

Indukcijom po n ćemo pokazati da su svi zeleni nizovi sretni.

Za $n = 2$ tvrdnja je očita.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki n i dokaćimo da vrijedi i za $n+1$. Za svaki k označimo s l_k pravac koji ide kroz ishodište i točku z_k. Među pravcima l_1, l_2, l_3 postoje dva koja se sijeku pod kutem $\leqslant 60^\circ$. Neka su to pravci l_α i l_β, a onaj treći označimo s l_γ. Budući da se l_α i l_β sijeku pod kutem $\leqslant 60^\circ$, slijedi da postoji $e'_\beta \in \{-1, 1\}$ takav da za $z' = z_\alpha + e'_\beta z_\beta$ vrijedi $|z'| \leqslant 1$.

Sada je niz $z', z_\gamma, z_4, \ldots, z_{n+1}$ zeleni niz duljine n pa je prema pretpostavci indukcije sretan, tj. postoji prijateljski niz $e', e_\gamma, e_4, e_5, \ldots, e_{n+1}$. Ako sad stavimo $e_\alpha = e'$ i $e_\beta = e'e'_\beta$ slijedi da je $\{e_k\}_{k=1}^{n+1}$ prijateljski niz od $\{z_k\}_{k=1}^{n+1}$, čime je tvrdnja dokazana. $\square$

Zadatak 7. Neka je $(a_n)_n$ niz realnih brojeva definiran s $a_1 = t$ i

$$a_{n+1} = 4a_n(1 - a_n), \quad n \geq 1.$$

Za koliko različitih vrijednosti broja t vrijedi $a_{2015} = 0$?

Rješenje: Neka je $f(x) = 4x(1-x)$. Uočimo da je

$$f^{-1}(0) = \{0, 1\}, \quad f^{-1}(1) = \{1/2\}, \quad f^{-1}([0,1]) = [0,1],$$

i $|\{y : f(y) = x\}| = 2$ za sve $x \in [0, 1)$.

Neka je $A_n = \{x \in \mathbb{R} : f^n(x) = 0\}$. Tada je

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= \{x \in \mathbb{R} : f^{n+1}(x) = 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : f^n(f(x)) = 0\} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in A_n\}. \end{aligned}$$

Tvrdimo da je za sve $n \geqslant 1$, $A_n \subset [0, 1]$, $1 \in A_n$ i

$$|A_n| = 2^{n-1} + 1.$$

Za $n = 1$ imamo

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\} = \{0, 1\},$$

i tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo sad da je $n \geqslant 1$, $A_n \subset [0, 1]$, $1 \in A_n$ i $|A_n| = 2^{n-1} + 1$. Tada

$$x \in A_{n+1} \implies f(x) \in A_n \subset [0,1] \implies x \in [0,1],$$

pa je i $A_{n+1} \subset [0, 1]$. Budući da je $f(0) = f(1) = 0$, imamo da je $f^{n+1}(1) = 0$ za sve $n \geqslant 1$, pa e i $1 \in A_{n+1}$. Sada imamo

$$\begin{aligned} |A_{n+1}| &= |\{x : f(x) \in A_n\}| = \sum_{a \in A_n} |\{x : f(x) = a\}| \\ &= |\{x : f(x) = 1\}| + \sum_{a \in A_n, a \in [0,1)} |\{x : f(x) = a\}| \\ &= 1 + \sum_{a \in A_n, a \in [0,1)} 2 = 1 + 2(|A_n| - 1) \\ &= 1 + 2(2^{n-1} + 1 - 1) = 2^n + 1, \end{aligned}$$

čime je tvrdnja dokazana.

Na kraju, $a_{2015}=0$ ako i samo ako je $f^{2014}(t)=0$, pa postoji $2^{2013}+1$ različitih vrijednosti od t. $\square$

Rješenje: Kao i u prethodnom rješenju uočimo da ako je $f(x)\in[0,1]$ mora biti $x\in[0,1]$, pa da bi imali $a_{2015}=0$ mora vrijediti $t\in[0,1]$. Izaberimo sam $\theta\in[0,\pi/2]$ takav da je $\sin\theta=\sqrt{t}$.

Uočimo da za svaki $\phi\in\mathbb{R}$ vrijedi

$$f(\sin^2\theta)=4\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)=4\sin^2\theta\cos^2\theta=\sin^2 2\theta.$$

Budući da je $a_1=\sin^2\theta$, slijedi da je

$$a_2=\sin^2 2\theta,\quad a_3=\sin^2 4\theta,\quad \dots,\quad a_{2015}=\sin^2 2^{2014}\theta.$$

Stoga je

$$a_{2015}=0 \iff \sin 2^{2014}\theta=0 \iff \theta=\frac{k\pi}{2^{2014}},$$

za neki $k\in\mathbb{Z}$. Znači da su vrijednosti od t koje daju $a_{2015}=0$ oblika $\sin^2(k\pi/2^{2014})$, a takvih različitih ima $2^{2013}+1$. $\square$

Zadatak 8. Dano je osam realnih brojeva $a_1,a_2,\dots,a_8$ različitih od nule. Dokaži da je barem jedan od šest brojeva $a_1a_3+a_2a_4$, $a_1a_5+a_2a_6$, $a_1a_7+a_2a_8$, $a_3a_5+a_4a_6$, $a_3a_7+a_4a_8$, $a_5a_7+a_6a_8$ nenegativan.

Rješenje: Promotrimo vektore $\vec{v}_1=(a_1,a_2),\vec{v}_2=(a_3,a_4),\vec{v}_3=(a_5,a_6)$ i $\vec{v}_4=(a_7,a_8)$. Tada je

$$\begin{aligned}
&\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2=a_1a_3+a_2a_4, &&\vec{v}_1\cdot\vec{v}_3=a_1a_5+a_2a_6, &&\vec{v}_1\cdot\vec{v}_4=a_1a_7+a_2a_8\\
&\vec{v}_2\cdot\vec{v}_3=a_3a_5+a_4a_6, &&\vec{v}_2\cdot\vec{v}_4=a_3a_7+a_4a_8, &&\vec{v}_3\cdot\vec{v}_4=a_5a_7+a_6a_8.
\end{aligned}$$

Budući da imamo četiri vektora kad ih sve translatiramo da imaju početak u ishodištu, vidimo da barem dva moraju zatvarati kut $\leqslant 90^\circ$. Neka su to vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Iz $\varphi=\angle(\vec{a},\vec{b})\leqslant 90^\circ$ slijedi $\cos\varphi\geqslant 0$, pa je

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi\geqslant 0,$$

što je i trebalo dokazati. $\square$

Zadatak 9. Neka je $n>2$ cijeli broj i neka je $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ funkcija takva da za svaki pravilan n-terokut $A_1A_2\dots A_n$ vrijedi

$$f(A_1)+f(A_2)+\ldots+f(A_n)=0.$$

Dokaži da je f nul-funkcija.

Rješenje: Možemo poistovjetiti $\mathbb{R}^2$ s kompleksnom ravninom. Ako označimo $\xi=e^{2\pi i/n}$ iz uvjeta zadatka slijedi da za svaki $z\in\mathbb{C}$ i pozitivan realan broj t vrijedi

$$\sum_{j=1}^{n} f(z+t\xi^j)=0.$$

Posebno, za svaki $k = 1, 2, \ldots, n$ dobijemo

$$\sum_{j=1}^{n} f(z - \xi^k + \xi^j) = 0,$$

što zbrajanjem po svim k daje

$$\sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} f(z - (1 - \xi^m)\xi^k) = 0.$$

Za $m = n$ je unutarnja suma jednaka $nf(z)$, a za druge m unutarnja suma opet ide po vrhovima pravilnog mnogokuta i stoga je 0. Iz toga slijedi da je $f(z) = 0$ za sve $z \in \mathbb{C}$. $\square$

Zadatak 10. Za niz $x_1, x_2, \ldots, x_n$ realnih brojeva definiramo njegovu *cijenu* kao

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_1 + \cdots + x_i|.$$

Za danih n realnih brojeva, Bobi i Rudi ih žele poredati u niz sa što manjom cijenom. Rudi provjeri sve moguće kombinacije i nađe minimalnu moguću cijenu R. Bobi s druge strane izabire x_1 tako da je $|x_1|$ najmanji mogući, zatim od preostalih brojeva izabire x_2 tako da je $|x_1 + x_2|$ najmanje moguće i tako dalje redom. Dakle, u i-tom koraku od preostalih brojeva izabere x_i tako da je vrijednost $|x_1 + x_2 + \cdots + x_i|$ najmanja moguća. Ako postoji više kandidata za x_i, Bobi izabere jednog na slučajan način. Na kraju dobije niz čija je cijena B.

Nađite najmanju konstantu $c > 0$ takvu da za svaki $n \in \mathbb{N}$, svaki mogući izbor od n realnih brojeva i svaki mogući niz koji Bobi može dobiti vrijedi

$$B \leqslant cR.$$

Rješenje: Dokazat ćemo da je $c = 2$.

Ako su dani brojevi $1, -1, 2, -2$, Rudi će ih poredati u niz $1, -2, 2, -1$ i dobit će cijenu $R = 1$. S druge strane, Bobi sa svojom strategijom može dobiti niz $1, -1, 2, -2$ čija je cijena $B = 2$. Dakle, $c \geqslant 2$.

Sada ćemo dokazati da uvijek vrijedi $B \leqslant 2R$. Neki su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ realni brojevi dati Bobiju i Rudiju na raspolaganje. Pretpostavimo da su ih oni posložili u nizove $b_1, b_2, \ldots, b_n$ i $r_1, r_2, \ldots, r_n$ redom. Označimo

$$M = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|, \quad S = |x_1 + \cdots + x_n|, \quad \text{i} \quad N = \max\{M, S\}.$$

Dokazat ćemo da je

$$R \geqslant S, \tag{1}$$

$$R \geqslant \frac{M}{2}, \quad \text{i} \tag{2}$$

$$B \leqslant N. \tag{3}$$

Iz gornjih nejednakosti tada slijedi

$$B \leqslant \max\{M, S\} \leqslant \max\{M, 2S\} \leqslant 2R.$$

Nejednakost (**??**) direktno slijedi iz definicije cijene niza.

Da bi dokazali (**??**) označimo s i indeks ($1 \leqslant i \leqslant n$) za koji je $|r_i| = M$. Tada je

$$M = |r_i| = |(r_1 + \cdots + r_i) - (r_1 + \cdots + r_{i-1})| \leqslant |r_1 + \cdots + r_i| + |r_1 + \cdots + r_{i-1}| \leqslant 2R.$$

Preostaje samo dokazati nejednakost (**??**). Označimo

$$s_i = b_1 + b_2 + \cdots + b_i.$$

Indukcijom ćemo dokazati da za svaki i vrijedi $|s_i| \leqslant N$. Baza $i = 1$ direktno slijedi, jer je $|s_1| = |b_1| \leqslant M \leqslant N$. (Uočimo da je i $|s_n| = S \leqslant N$.)
Za korak indukcije pretpostavimo da je $|s_{i-1}| \leqslant N$. Razlikujemo dva slučaja:

(1°) *Svi brojevi $b_i, b_{i+1}, \ldots, b_n$ su istog predznaka.*
BSOMP da su svi nenegativni. Tada je $s_{i-1} \leqslant s_i \leqslant \cdots \leqslant s_n$ i stoga

$$|s_i| \leqslant \max\{|s_{i-1}|, |s_n|\} \leqslant N.$$

(2°) *Među brojevima $b_i, b_{i+1}, \ldots, b_n$ ima i pozitivnih i negativnih.*
Tada postoji indeks $j \geqslant i$ takav da je $s_{i-1}b_j \leqslant 0$ (s_{i-1} i b_j su suprotnog predznaka). Tada iz načina konstrukcije Bobijevog niza slijedi

$$|s_i| = |s_{i-1} + b_i| \leqslant |s_{i-1} + b_j| \leqslant \max\{|s_{i-1}|, |b_j|\} \leqslant N,$$

i time dokaz završen.

□

Napomena 1. *Moglo se i dokazati slabije nejednakosti*

$$R \geqslant \frac{M}{2} \quad i \quad B \leqslant R + \frac{M}{2}.$$

Zadatak 11. Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $a_1, a_2, \ldots, a_n$ niz prirodnih brojeva. Periodično proširimo taj niz tako da definiramo $a_{n+i} := a_i$ za sve $i \geqslant 1$. Ako vrijedi

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant a_1 + n \tag{4}$$

i

$$a_{a_i} \leqslant n + i - 1 \qquad \text{za} \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

dokažite da je

$$a_1 + \cdots + a_n \leqslant n^2.$$

Rješenje: Prvo dokažimo da je

$$a_i \leqslant n+i-1 \qquad \text{za} \quad i=1,2,\dots,n. \tag{6}$$

Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji neki indeks za koji gornja nejednakost ne vrijedi i neka je i najmanji takav indeks. Iz

$$a_n \geqslant a_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant a_i \geqslant n+i$$

i $a_{a_i} \leqslant n+i-1$ zbog periodičnosti niza slijedi da

$$a_i \not\equiv i, i+1, \dots, n-1, n \pmod{n}. \tag{7}$$

Stoga iz pretpostavke $a_i \geqslant n+i$ slijedi da mora biti $a_i \geqslant 2n+1$, pa sad iz (**??**) imamo

$$a_1 + n \geqslant a_n \geqslant a_1 \geqslant 2n+1 \implies a_1 \geqslant n+1.$$

Budući da je i bio minimalan indeks za kojeg ne vrijedi (**??**), slijedi da je $i=1$, pa dobivamo kontradikciju u (**??**). Time je (**??**) dokazana.

Sada znamo da je $a_1 \leqslant n$. Kad bi bilo i $a_n \leqslant n$ imali bi

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant n,$$

pa bi tražena nejednakost slijedila trivijalno. U protivnome, neka je $1 \leqslant t \leqslant n-1$ takav da je

$$a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_t \leqslant n < a_{t+1} \leqslant \cdots \leqslant a_n. \tag{8}$$

Budući da je $1 \leqslant a_1 \leqslant n$ i $a_{a_1} \leqslant n$ iz (**??**), imamo $a_1 \leqslant t$ i zato je $a_n \leqslant n+t$. Stoga ako za svaki prirodan broj i označimo s b_i broj indekasa $j \in \{t+1, \dots, n\}$ za koje je $a_j \geqslant n+i$ imamo

$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_{t+1} = 0.$$

Sada tvrdimo da je $a_i + b_i \leqslant n$ za $1 \leqslant i \leqslant t$. Zaista, zbog $a_{a_i} \leqslant n+i-1$ i $a_i \leqslant n$, svaki j koji zadovoljava $a_j \geqslant n+i$ (i zato $a_j > a_i$) se mora nalaziti u skupu $\{a_i+1, \dots, n\}$ i zato je $b_i \leqslant n - a_i$.

Iz definicije b_i-ova i (**??**) slijedi da je

$$a_{t+1} + \cdots + a_n \leqslant n(n-t) + b_1 + \cdots + b_t,$$

pa dodavanjem $a_1 + \cdots + a_t$ na obje strane dobijemo

$$a_1 + \cdots + a_t + a_{t+1} + \cdots + a_n \leqslant n(n-t) + (a_1+b_1) + \cdots + (a_t+b_t) \leqslant n(n-t) + nt = n^2,$$

što smo i željeli dokazati. □

Zadatak 12. Neka je $P(x)$ polinom s realnim koeficijentima takav da za svaka dva realna broja x i y vrijedi

$$|y^2 - P(x)| \leqslant 2|x| \iff |x^2 - P(y)| \leqslant 2|y|. \tag{9}$$

Odredite sve moguće vrijednosti od $P(0)$.

Rješenje: Dokazat ćemo da su sve moguće vrijednosti od $P(0)$ sadržane u $(-\infty, 0) \cup \{1\}$.

Prvo ćemo dokazati da $P(0)$ zaista može poprimiti sve vrijednosti iz skupa $(-\infty, 0) \cup \{1\}$. Za $C > 0$ definiramo polinom $P(x) = -\left(\frac{2x^2}{C} + C\right)$. Vidimo da je $P(0) = -C < 0$, pa samo treba dokazati da taj polinom zadovoljava uvjet (**??**). To ćemo napraviti tako da pokažemo da za svaka dva realna broja x i y vrijedi $|y^2 - P(x)| > 2|x|$. Vrijedi

$$|y^2 - P(x)| = y^2 + \frac{x^2}{C} + \frac{(|x| - C)^2}{C} + 2|x| \geqslant \frac{x^2}{C} + 2|x| \geqslant 2|x|,$$

gdje prva nejednakost postaje jednakost za $|x| = C$, a druga za $x = 0$. Budući da ne mogu oba uvjeta istovremeno biti ispunjena, slijedi $|y^2 - P(x)| > 2|x|$.

Preostalo je pokazati da je $P(0) = 1$ također moguća vrijednost. Sad definiramo polinom $P(x) = x^2 + 1$ i pokažimo za zadovoljava (**??**). Za realne x i y imamo

$$\begin{aligned}
|y^2 - P(x)| \leqslant 2|x| &\iff (y^2 - x^2 - 1)^2 \leqslant 4x^2 \\
&\iff 0 \leqslant \left(y^2 - (x-1)^2\right)\left((x+1)^2 - y^2\right) \\
&\iff (y - x + 1)(y + x - 1)(x + 1 - y)(x + 1 + y) \\
&\iff \left((x+y)^2 - 1\right)\left(1 - (x-y)^2\right).
\end{aligned}$$

Budući da je zadnja nejednakosti simetrična u x i y, slijedi (**??**).

Sada ćemo pokazati da su to stvarno jedine moguće vrijednosti za $P(0)$. Pretpostavimo da je P polinom koji zadovoljava (**??**) i za kojeg je $P(0) \geqslant 0$. Dokazat ćemo da je u tom slučaju $P(x) = x^2 + 1$ iz čega naravno slijedi da je $P(0) = 1$.

1. *Polinom P je paran.*

   Iz (**??**) slijedi da je

   $$|y^2 - P(x)| \leqslant 2|x| \iff |x^2 - P(y)| \leqslant 2|y| \iff |y^2 - P(-x)| \leqslant 2|x|,$$

   za sve realne x i y. Iz ekvivalencije prve i treće nejednakosti slijedi

   $$\left[P(x) - 2|x|, P(x) + 2|x|\right] \cap \mathbb{R}_{\geqslant 0} = \left[P(-x) - 2|x|, P(-x) + 2|x|\right] \cap \mathbb{R}_{\geqslant 0}$$

   za sve $x \in \mathbb{R}$. Postoji beskonačno mnogo realnih brojeva x takvih da je $P(x) + 2|x| \geqslant 0$. (To vrijedi jer je $P(0) \geqslant 0$. Možemo pretpostaviti da je koeficijent uz x u polinomu P nenegativan, pa će tražena nejednakost vrijediti za sve dovoljno male pozitivne realne brojeve.)

   Za x takve da $P(x) + 2|x| \geqslant 0$ tada vrijedi

   $$P(x) + 2|x| = P(-x) + 2|x| \implies P(x) = P(-x).$$

   To znači da polinom $P(x) - P(-x)$ ima beskonačno mnogo nultočaka, pa mora biti identički jednak nuli. Stoga je $P(x) = P(-x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, tj. P je paran.

2. $P(t) > 0$ *za sve* $t \in \mathbb{R}$.

   Pretpostavimo da postoji realan broj $t \neq 0$ takav da je $P(t) = 0$. Tada postoji neki otvoreni interval I oko t takav da je $|P(y)| \leqslant 2|y|$ za sve $y \in I$. Uvrštavanjem $x = 0$ u (**??**) dobijemo da je $y^2 = P(0)$ za sve $y \in I$, što je očito nemoguće. Stoga je $P(t) \neq 0$ za sve $t \neq 0$.

   Pretpostavimo sad da je $P(0) = 0$. Budući da je P paran, postoji polinom Q takav da je $P(x) = x^2 Q(x)$. Ako sad u (**??**) uvrstimo $x = 0$ i proizvoljan $y \neq 0$ dobijemo da mora vrijedi $|yQ(y)| > 2$, što je očito nemoguće za dovoljno mali y.

3. *P je kvadratni polinom.*

   Uočimo da P ne može biti konstantan polinom, jer za $x = \sqrt{P(0)}$ i dovoljno veliki y je $|y^2 - C| > 2|\sqrt{P(0)}|$ i $|x^2 - P(y)| = |P(0) - P(y)| = 0 < 2|y|$, pa ne vrijedi (**??**). Ako označimo stupanj polinoma P s n, mora vrijediti $n \geqslant 2$ (jer je P paran).

   Pretpostavimo sad da je $n \geqslant 4$. Uvrštavanjem $y = \sqrt{P(x)}$ u (**??**) dobivamo $|x^2 - P(\sqrt{P(x)})| \leqslant 2\sqrt{P(x)}$, odnosno

   $$P(\sqrt{P(x)}) \leqslant x^2 + 2\sqrt{P(x)}$$

   za svaki $x \in \mathbb{R}$. Izaberimo sad pozitivne realne brojeve x_0, a i b takve da za $x > x_0$ vrijedi

   $$ax^n < P(x) < bx^2.$$

   (To je moguće, jer je $\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{x^n} = d$, gdje je $d > 0$ vodeći koeficijent polinoma P.)

   Sada za sve dovoljno velike x vrijedi

   $$a^{n/2+1} x^{n^2/2} < aP(x)^{n/2} < P(\sqrt{P(x)}) \leqslant x^2 + 2\sqrt{P(x)} < x^{n/2} + 2b^{1/2} x^{n/2},$$

   odnosno

   $$x^{(n^2-n)/2} < \frac{1 + 2b^{1/2}}{a^{n/2+1}},$$

   što očito ne može biti istina. Stoga je P zaista kvadratni polinom.

4. $P(x) = x^2 + 1$.

   Budući da je P paran, kvadratni polinom koji poprima pozitivne vrijednosti za sve realne brojeve, možemo ga zapisati u obliku $P(x) = ax^2 + b$, $a > 0$. Za dovoljno velik x i $y = \sqrt{a}x$ je $|y^2 - P(x)| = |b| \leqslant 2|x|$, pa zboj (**??**) mora vrijediti i

   $$|x^2 - P(y)| \leqslant 2|y| \implies |(1 - a^2)x^2 - b| \leqslant 2\sqrt{a}x.$$

   Budući da je $a > 0$ to može vrijediti samo ako je $a = 1$. Na kraju uvrštavanjem $y = x + 1$, $x > 0$ u (**??**) dobivamo

   $$|2x + 1 - b| \leqslant 2x \iff |2x + 1 + b| \leqslant 2x + 2,$$

   odnosno

   $$b \in [1, 4x + 1] \iff b \in [-4x - 3, 1],$$

   za sve $x > 0$. Ako izaberemo dovoljno velik x, možemo postići da je barem jedna od ove dvije tvrdnje istinita. Tada moraju obje biti istinite, a to je moguće jedino za $b = 1$.

$\square$