HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Prvi dan

Zagreb, 16. travnja 2016.

Zadatak 1.

Niz $a_1, a_2, \ldots$ pozitivnih realnih brojeva zadovoljava uvjet

$$a_{k+1} \geqslant \frac{ka_k}{a_k^2 + k - 1}$$

za svaki prirodni broj k. Dokaži da je

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqslant n$$

za svaki $n \geqslant 2$.

Prvo rješenje.

Iz uvjeta zadatka

$$a_{k+1} \geqslant \frac{ka_k}{a_k^2 + (k-1)}, \tag{1}$$

vidimo da je

$$\frac{k}{a_{k+1}} \leqslant \frac{a_k^2 + (k-1)}{a_k} = a_k + \frac{k-1}{a_k},$$

i stoga je

$$a_k \geqslant \frac{k}{a_{k+1}} - \frac{k-1}{a_k}.$$

Zbrajenjem gornjih nejednakosti za $k = 1, \ldots, m$, dobijemo

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_m \geqslant \left(\frac{1}{a_2} - \frac{0}{a_1}\right) + \left(\frac{2}{a_3} - \frac{1}{a_2}\right) + \cdots + \left(\frac{m}{a_{m+1}} - \frac{m-1}{a_m}\right) = \frac{m}{a_{m+1}}. \tag{2}$$

Sada ćemo tvrdnju zadatka dokazati indukcijom po n. Baza indukcije (slučaj $n = 2$) slijedi primjenom uvjeta (1) na $k = 1$:

$$a_1 + a_2 \geqslant a_1 + \frac{1}{a_1} \overset{\text{A–G}}{\geqslant} 2.$$

Pretpostavimo sad da je tvrdnja istinita za neki $n \geqslant 2$. Ako je $a_{n+1} \geqslant 1$, onda iz pretpostavke indukcije slijedi

$$(a_1 + \cdots + a_n) + a_{n+1} \geqslant n + 1.$$

S druge strane, ako je $a_{n+1} < 1$ primjenimo (2) i dobijemo

$$(a_1 + \cdots + a_n) + a_{n+1} \geqslant \frac{n}{a_{n+1}} + a_{n+1} = \frac{n-1}{a_{n+1}} + \left(\frac{1}{a_{n+1}} + a_{n+1}\right) \overset{\text{A–G}}{\geqslant} (n-1) + 2 = n + 1.$$

Time je tvrdnja zadatka dokazana.

Drugo rješenje. *(Ivan Kokan)*

Za $k = 1$ imamo

$$a_2 a_1^2 - a_1 \geqslant 0,$$

odakle je $a_1 a_2 \geqslant 1$, a zatim i $a_1 + a_2 \overset{\text{A–G}}{\geqslant} 2\sqrt{a_1 a_2} \geqslant 2$.

Za $k > 1$ imamo $a_k^2 + k - 1 > 0$, pa je $a_{k+1}\left(a_k^2 + k - 1\right) \geqslant k a_k$, odnosno

$$a_{k+1} a_k^2 - k a_k + (k-1) a_{k+1} \geqslant 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Diskriminante $D_k = (-k)^2 - 4(k-1)a_{k+1}^2$ ovih kvadratnih funkcija po a_k nisu pozitivne, odakle slijedi

$$0 \geqslant k^2 - 4(k-1)a_{k+1}^2, \quad \text{tj.} \quad a_{k+1}^2 \geqslant \frac{k^2}{4(k-1)}.$$

Stoga je $a_{k+1} \geqslant \dfrac{k}{2\sqrt{k-1}} \overset{\text{G–A}}{\geqslant} \dfrac{k}{(k-1)+1} = 1$, $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Konačno je $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqslant 2 + (n-2) \cdot 1 = n$, a jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$.

Zadatak 2.

U ravnini je dan skup A koji sadrži 2016 točaka tako da nikoje četiri točke iz skupa A ne leže na istom pravcu. Dokaži da je moguće odabrati podskup $B \subset A$ koji sadrži barem 63 točke tako da nikoje tri točke iz skupa B ne leže na istom pravcu.

Rješenje.

Neka je $B \subseteq A$ najveći podskup koji ne sadrži tri točke na istom pravcu. Neka je $|B| = k$.

Budući da je B najveći, svaka točka iz skupa $A \setminus B$ leži na nekom na nekom pravcu koji prolazi kroz dvije točke iz skupa B. S druge strane, svaki pravac koji prolazi kroz dvije točke iz B može sadržavati najviše jednu točku iz $A \setminus B$ jer smo pretpostavili da nikoje četiri točke iz A ne leže na istom pravcu.

Broj točaka u $A \setminus B$ je $2016 - k$, a broj parova točaka u B je $\dfrac{k(k-1)}{2}$. Zato je

$$2016 - k \leqslant \frac{k(k-1)}{2}.$$

Ova nejednakost vrijedi ako i samo ako je $k \geqslant 63$ ili $k \leqslant -64$. Budući da broj točaka ne može biti negativan, skup B sadrži barem 63 točke.

Zadatak 3.

Zadan je tetivni četverokut $ABCD$ takav da se tangente u točkama B i D na njegovu opisanu kružnicu k sijeku na pravcu AC. Točke E i F leže na kružnici k tako da su pravci AC, DE i BF paralelni. Neka je M sjecište pravaca BE i DF. Ako su P, Q i R nožišta visina trokuta ABC, dokaži da točke P, Q, R i M leže na istoj kružnici.

Rješenje.

Poznato je da nožišta visina i polovišta stranica trokuta ABC leže na jednoj kružnici (to je Feurbachova ili kružnica 9 točaka). Zato je dovoljno dokazati da je M polovište dužine $\overline{AC}$.

Neka je M' presjek pravaca BE i AC. Dokazat ćemo da je M' polovište dužine $\overline{AC}$.

Neka je X sjecište pravca AC i tangenti u točkama B i D. Četverokut $ACDE$ je jednakokračni trapez te je $|CD| = |AE|$ i $\sphericalangle DCM' = \sphericalangle M'AE$. Ako dokažemo da je $\sphericalangle EM'A = \sphericalangle CM'D$, tj. $\sphericalangle XM'B = \sphericalangle XM'D$, onda prema K–S–K teoremu slijedi da su trokuti $AM'E$ i $CM'D$ sukladni. Zbog te sukladnosti je $|AM'| = |CM'|$.

Pokažimo zato da vrijedi $\sphericalangle XM'B = \sphericalangle XM'D$. Zbog paralelnosti pravaca AC i BE, te prema teoremu o kutu tetive i tangente vrijedi

$$\sphericalangle XM'B = \sphericalangle DEB = \sphericalangle XDB,$$

pa je $XDM'B$ tetivan četverokut. Koristeći tetivnost tog četverokuta i činjenicu da odsječci tangenti $\overline{XB}$ i $\overline{XD}$ imaju jednaku duljinu dobivamo

$$\sphericalangle XM'D = \sphericalangle XBD = \sphericalangle XDB = XM'B.$$

Dakle, pravac BE prolazi polovištem dužine $\overline{AC}$. Analogno se pokazuje da i pravac DF prolazi polovištem dužine $\overline{AC}$. Budući da dva pravca mogu imati najviše jednu zajedničku točku, zaključujemo da je točka M polovište dužine $\overline{AC}$, pa je dokaz završen.

Zadatak 4.

Neka su m i n prirodni brojevi takvi da je $m > n$. Označimo

$$x_k = \frac{m+k}{n+k}$$

za $k = 1, 2, \ldots, n+1$. Ako su svi brojevi $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ prirodni, dokaži da je broj

$$x_1 x_2 \cdots x_{n+1} - 1$$

djeljiv nekim neparnim prostim brojem.

Rješenje.

Pretpostavimo da su $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ prirodni brojevi. Definiramo

$$a_k = x_k - 1 = \frac{m+k}{n+k} - 1 = \frac{m-n}{n+k} > 0$$

za $k = 1, 2, \ldots, n+1$, i to su također prirodni brojevi.

Neka je $P = x_1 x_2 \cdots x_{n+1} - 1$. Trebamo dokazati da je P djeljiv nekim neparnim prostim brojem, tj. da P nije potencija od 2. Da bi to dokazali, promatrat ćemo s kojim potencijama broja 2 su djeljivi brojevi a_k.

Neka je 2^d najveća potencija od 2 koja dijeli $m-n$, a 2^c najveća potencija od 2 koja ne prelazi $2n+1$. Tada je $2n+1 \leqslant 2^{c+1} - 1$, i stoga $n+1 \leqslant 2^c$. Možemo zaključiti da je 2^c jedan od brojeva $n+1, n+2, \ldots, 2n+1$, i da je to jedini višekratnik od 2^c koji se pojavljuje među tim brojevima. Neka je l takav da je $n + l = 2^c$. Budući da je $\frac{m-n}{n+l}$ prirodan broj, slijedi $d \geqslant c$. Stoga

$$2^{d-c+1} \nmid a_l = \frac{m-n}{n+l},$$

dok

$$2^{d-c+1} \mid a_k \quad \text{za sve} \quad k \in \{1, \dots, n+1\} \setminus \{l\}.$$

Računanjem modulo 2^{d-c+1}, dobijemo

$$P = (a_1+1)(a_2+1)\cdots(a_{n+1}+1) - 1 \equiv (a_l+1) \cdot 1^n - 1 \equiv a_l \not\equiv 0 \pmod{2^{d-c+1}}.$$

Stoga, $2^{d-c+1} \nmid P$.

S druge strane, za svaki $k \in \{1, \dots, n+1\} \setminus \{l\}$, vrijedi $2^{d-c+1} \mid a_k$. Zbog toga je

$$P \geqslant a_k \geqslant 2^{d-c+1},$$

pa slijedi da P ne može biti potencija od 2.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Drugi dan

Zagreb, 17. travnja 2016.

Zadatak 1.

Dan je prirodni broj n. Dokaži da za sve realne brojeve $x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$ vrijedi nejednakost

$$\left(x_1 + \frac{x_2}{2} + \cdots + \frac{x_n}{n}\right) \cdot (x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n) \leqslant \frac{(n+1)^2}{4n} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 .$$

Rješenje.

Vrijedi

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k}\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} kx_k\right) &= \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{nx_k}{k}\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} kx_k\right) \\
&\overset{A-G}{\leqslant} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{nx_k}{k} + \sum_{k=1}^{n} kx\right)^2 = \frac{1}{4n} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \left(\frac{n}{k} + k\right)\right)^2 \\
&\leqslant \frac{(n+1)^2}{4n} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 .
\end{aligned}$$

Zadnja nejednakost slijedi iz

$$\frac{n}{k} + k \leqslant n + 1 \iff (n-k)(k-1) \geqslant 0.$$

Uočimo da se jednakost postiže kad je $x_1 = x_n$, a $x_2 = \cdots = x_{n-1} = 0$.

Zadatak 2.

Na ploči $N \times N$ ($N \geqslant 2$) dva su dijagonalno suprotna kutna polja obojana u crno, a sva ostala obojana su u bijelo. U jednom koraku odaberemo redak ili stupac i promijenimo boju svakom polju u tom retku ili stupcu iz crne u bijelu i obratno. Koji je najmanji dodatni broj polja koje na početku moramo obojati u crno kako bismo nakon konačnog broja opisanih koraka mogli dobiti ploču na kojoj su sva polja crna?

Rješenje.

Uočimo da redoslijed izvođenja koraka nije važan, te možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da ćemo prvo provoditi korake po retcima, a onda korake po stupcima. Također uočimo da nijedan korak nema potrebe provoditi više od jednom.

Promotrimo kakvo mora biti početno bojenje ploče kako bismo nakon konačnog niza koraka dobili potpuno crnu ploču. Budući da ćemo prvo primijeniti korak po retcima, a onda po stupcima, možemo uočiti da će prije primjene koraka po stupcima na ploči svi retci morati biti obojeni na isti način.

Zbog toga zaključujemo da u početnom bojenju svi retci moraju biti obojeni na jedan od dva moguća načina koji se mogu dobiti jedan iz drugoga primjenom koraka.

Ako svaki redak u početnom bojenju sadrži barem dva crna polja, onda je broj crnih polja barem $2n$. Pretpostavimo da postoji redak koji sadrži najviše jedno crno polje. Taj redak ne može biti jednak i prvom i posljednjem retku jer su u njima crna polja u različitim stupcima. To znači da postoji redak koji je obojan suprotno i sadrži barem $n-1$ crnih polja. Ako taj redak sadrži n crnih polja, onda prvi i zadnji redak oba sadrže n crnih polja i ukupan broj crnih polja je barem $2n$. Ako taj redak sadrži točno $n-1$ crnih polja, onda u preostalih $n-1$ redaka mora biti barem po jedno crno polje, te je ukupan broj crnih polja barem $2n-2$.

Ovime smo pokazali da ukupan broj crnih polja na početku mora biti barem $2n-2$, tj. da moramo obojiti barem $2n-4$ dodatna polja.

S druge strane, obojimo li u prvom retku i stupcu sva polja osim posljednjeg u crno (kao na slici), onda će nakon konačnog broja koraka (na prvih $n-1$ redaka i prvih $n-1$ stupaca) čitava ploča biti crna. Dakle, najmanji broj polja koja je potrebno dodatno obojiti u crno je $2n-4$.

Zadatak 3.

Pretpostavimo da je P točka unutar trokuta ABC takva da vrijedi

$$\frac{|AP|+|BP|}{|AB|}=\frac{|BP|+|CP|}{|BC|}=\frac{|CP|+|AP|}{|CA|}.$$

Neka pravci AP, BP, CP ponovno sijeku trokutu ABC opisanu kružnicu redom u točkama A', B', C'. Dokaži da trokuti ABC i $A'B'C'$ imaju zajedničku upisanu kružnicu.

Rješenje.

U trokutu ABC duljine stranica označavamo a, b, c, poluopseg s, radijus upisane kružnice sa r, radijus opisane kružnice sa R te površinu sa P. Analogne elemente u trokutu $A'B'C'$ pisat ćemo istim slovima s dodanom crticom. Najprije ćemo pokazati da trokuti ABC i $A'B'C'$ imaju jednake radijuse upisanih kružnica.

Označimo li zajedničku vrijednost triju razlomaka iz zadatka s λ, rješavanjem sustava

$$|AP|+|BP|=\lambda c, \quad |BP|+|CP|=\lambda a, \quad |CP|+|AP|=\lambda b$$

dobivamo

$$|AP|=\lambda(s-a), \quad |BP|=\lambda(s-b), \quad |CP|=\lambda(s-c). \tag{3}$$

Množenje te korištenje Heronove formule i formule $P=rs$ daju

$$|AP||BP||CP|=\lambda^3(s-a)(s-b)(s-c)=\lambda^3P^2/s=\lambda^3Pr. \tag{4}$$

Nadalje, trokuti PBC i $PC'B'$ su slični jer imaju tri jednaka kuta po teoremu o obodnim kutevima nad $\overline{BC'}$ i $\overline{B'C}$. Odavde slijedi

$$\frac{a'}{a}=\frac{|B'C'|}{|BC|}=\frac{|C'P|}{|BP|}=\frac{|B'P|}{|CP|} \tag{5}$$

pa množenjem ove i dviju analognih relacija dobivamo

$$\frac{a'b'c'}{abc}=\frac{|A'P||B'P||C'P|}{|AP||BP||CP|}. \tag{6}$$

S druge strane, iz formule $P = abc/4R$ i činjenice da $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ imaju zajedničku opisanu kružnicu proizlazi

$$\frac{a'b'c'}{abc} = \frac{P'}{P}. \tag{7}$$

Iz (5) dobivamo i

$$\frac{|B'P| + |C'P|}{|B'C'|} = \frac{|BP| + |CP|}{|BC|} = \lambda$$

te sasvim analogno

$$\frac{|A'P| + |B'P|}{|A'B'|} = \frac{|C'P| + |A'P|}{|C'A'|} = \lambda.$$

Zaključujemo da točka P ima isto svojstvo obzirom na trokut $A'B'C'$ kao i obzirom na polazni trokut, i to čak s istim omjerom λ. Zato direktno slijedi jednakost analogna jednakosti (4):

$$|A'P||B'P||C'P| = \lambda^3 P'r'. \tag{8}$$

Kombiniranje relacija (4), (6), (7), (8) daje

$$\frac{P'}{P} = \frac{P'r'}{Pr},$$

odakle konačno zaključujemo $r' = r$.

Označimo s I središte kružnice upisane trokutu ABC te s D njeno dиralište sa stranicom $\overline{BC}$. Točke I' i D' definirane su analogno obzirom na trokut $A'B'C'$. Poznata je činjenica da vrijedi

$$|BD| = s - b, \quad |CD| = s - c,$$

što u kombinaciji s (3) daje

$$\frac{|BP|}{|CP|} = \frac{|BD|}{|CD|}.$$

Po teoremu o simetrali kuta znamo da je PD upravo simetrala kuta $\sphericalangle BPC$. Koristeći relacije za trokut $A'B'C'$ analogne relacijama (3) slijedi i da je PD' simetrala kuta $\sphericalangle B'PC'$, iz čega proizlazi da točke D, P i D' leže na istom pravcu. Nadalje je

$$\begin{aligned}\sphericalangle C'D'P &= 180^\circ - \sphericalangle D'PC' - \sphericalangle PC'D' = 180^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle B'PC' - \sphericalangle CC'B' \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}\sphericalangle BPC - \sphericalangle CBB' = 180^\circ - \sphericalangle BPD - \sphericalangle DBP = \sphericalangle PDB.\end{aligned}$$

Kako je $I'D' \perp B'C'$ i $ID \perp BC$, dobili smo $\sphericalangle DD'I' = \sphericalangle IDD'$. Prisjetimo se da je $|D'I'| = r' = r = |DI|$. Ukoliko je $I' \neq I$, zaključujemo da je $D'DII'$ ili $D'DI'I$ jednakokračni trapez pa je posebno pravac II' paralelan s pravcem PD. Sasvim analogno bi slijedilo da je II' paralelan i s preostala dva pravca koji prolaze kroz P i po jedno dиralište upisane kružnice sa stranicom trokuta ABC. To vodi na kontradikciju s činjenicom da su od ta tri pravca kroz P barem dva međusobno različita, čime smo dokazali $I' = I$. Dakle, kružnice upisane trokutima ABC i $A'B'C'$ se podudaraju.

Zadatak 4.

Odredi sve parove (p, q) prostih prirodnih brojeva takve da vrijedi

$$p(p^2 - p - 1) = q(2q + 3).$$

Rješenje.

Ako je $p = q$, onda jednadžba glasi $p^2 - p - 1 = 2p + 3$, tj. $p^2 - 3p - 4 = 0$. Rješenja te jednadžbe su $p_1 = -1$ i $p_2 = 4$, što nisu prosti brojevi.

Pretpostavimo zato da je $p \neq q$. Tada p dijeli $2q + 3$ i q dijeli $p^2 - p - 1$. Zato postoji prirodni broj k takav da je $2q + 3 = kp$, odnosno $q = \dfrac{kp - 3}{2}$. Uvrštavanjem u početnu jednadžbu dobivamo

$$2p^2 - 2p - 2 = (kp - 3)k, \quad \text{tj.} \quad 2p^2 - (k^2 + 2)p + (3k - 2) = 0.$$

Promotrimo li posljednju jednadžbu kao kvadratnu jednadžbu u varijabli p, zaključujemo da diskriminanta $D = (k^2 + 2)^2 - 8(3k - 2)$ mora biti kvadrat cijelog broja.

Očito je $D < (k^2 + 2)^2$. Ako je $k \geqslant 6$, onda je $2k^2 - 12k + 12 > 0$, odakle je $D > k^4$. U tom slučaju mora vrijediti $D = (k^2 + 1)^2$, tj.

$$(k^2 + 2)^2 - 8(3k - 2) = (k^2 + 1)^2,$$

što daje jednadžbu $2k^2 - 12k + 11 = 0$, koja nema cjelobrojnih rješenja.

Dakle, mora biti $k < 6$. Uvrštavanjem brojeva $k = 1, 2, 3, 4, 5$ vidimo da je jedino za $k = 5$ diskriminanta D kvadrat prirodnog broja.

Jedino rješenje je $k = 5$, $p = 13$ i $q = 31$.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Završni test za izbor IMO ekipe

Zagreb, 24. travnja 2016.

Zadatak 1.

Odredi sve funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve realne brojeve x i y vrijedi

$$f(x^2) + xf(y) = f(x)f(x + f(y)).$$

Rješenje.

Uvrstimo li $x = 0$ danu jednadžbu dobivamo $f(0) = f(0)f(f(y))$, pa je

$$f(0)[f(f(y)) - 1] = 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Ako je $f(f(y)) = 1, \forall y \in \mathbb{R}$, onda je $f(f(0)) = 1$ i $f(1) = f(f(f(0))) = 1$. Uvrštavanjem $x = y = 1$ u danu jednadžbu dobivamo $f(1) + f(1) = f(1)f(1 + f(1))$, što povlači $f(2) = 2$. No, $1 = f(f(2)) = f(2) = 2$, što je kontradikcija.

Dakle, $f(0) = 0$ i uvrštavanjem $y = 0$ u danu jednadžbu dobivamo

$$f(x^2) = f(x)^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Iz prethodne jednadžbe dobivamo $f(1^2) = f(1)^2$, pa je $f(1) = 0$ ili $f(1) = 1$.

1. Ako je $f(1) = 0$, uvrštavanjem $x = 1$ u danu jednadžbu dobivamo $0 + f(y) = 0$, tj. $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, što je rješenje.
2. Ako je $f(1) = 1$, uvrštavanjem $x = 1$ u danu jednadžbu dobivamo $1 + f(y) = f(1 + f(y))$, odnosno
$$f(f(x) + 1) = f(x) + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{10}$$
Uvrstimo li $y = 1$ u danu jednadžbu, zajedno s jednadžbom (9), dobivamo
$$f(x)^2 + x = f(x)f(x + 1), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{11}$$
što povlači $f(x) = 0 \implies x = 0$, tj. $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Nadalje, uvrstimo li $y = x$ u danu jednadžbu i iskoristimo li (9) dobivamo $f(x)^2 + xf(x) = f(x)f(x + f(x)), \forall x \in \mathbb{R}$. Ako je $x \neq 0$, onda je $f(f(x) + x) = f(x) + x$. No, to vrijedi i za $x = 0$. Dakle, vrijedi
$$f(f(x) + x) = f(x) + x, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Uvrstimo li $y = x - 1$ u danu jednadžbu, zajedno s jednadžbom (9), dobivamo

$$\begin{aligned}
f(x)^2 + xf(x-1) &= f(x)f(x + f(x-1)) \\
&= f(x)f(f(x-1) + (x-1) + 1) \\
&\overset{(12)}{=} f(x)f(f(f(x-1) + (x-1)) + 1) \\
&\overset{(10)}{=} f(x)[f(f(x-1) + (x-1)) + 1] \\
&= f(x)f(f(x-1) + (x-1)) + f(x) \\
&\overset{(12)}{=} f(x)[f(x-1) + (x-1)] + f(x) \\
&= f(x)f(x-1) + xf(x),
\end{aligned}$$

što povlači $[f(x) - x][f(x) - f(x-1)] = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Ako postoji $x_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $f(x_0) = f(x_0 - 1)$, onda uvrštavanjem $x = x_0 - 1$ u (11) dobivamo $f(x_0 - 1)^2 + x_0 - 1 = f(x_0 - 1)f(x_0)$ i zato je $x_0 = 1$. No, znamo da vrijedi $f(x_0) = f(1) = 1 \neq 0 = f(0) = f(x_0 - 1)$ pa zaključujemo da pje pretpostavka pogrešna. Dakle, $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$, što je drugo rješenje dane jednažbde.

Konačno, $f(x) = 0$ i $f(x) = x$ su jedine dvije funkcije koje zadovoljavaju dane uvjete.

Zadatak 2.

Dano je $N \geqslant 3$ točaka u ravnini takvih da nikoje tri ne leže na istom pravcu. Svaka dužina koja spaja dvije dane točke je obojana crvenom ili plavom bojom. Dokaži da postoji $N - 1$ dužina iste boje koje ne dijele ravninu na više od jednog dijela takve da se nikoje dvije ne sijeku osim u vrhovima.

Rješenje.

Uvjet da $N - 1$ dužina ne dijeli ravninu na više od jednog dijela ekvivalentan je uvjetu da te dužine čine jednobojno stablo (povezan graf bez ciklusa) koje je uloženo u ravninu i u kojem se bridovi ne sijeku (osim u vrhovima).

Tvrdnju ćemo dokazati matematičkom indukcijom po N. Ako je $N = 3$, onda je tvrdnja očita jer tri točke određuju tri dužine i barem dvije dužine moraju biti iste boje.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za prirodne brojeve manje ili jednake N i promotrimo konveksnu ljusku skupa koji se sastoji od $N+1$ točaka. Ako postoje dvije dužine različite boje na rubu konveksne ljuske koima je zajednička točka A, onda prema pretpostavci indukcije postoji jednobojno stablo na svim točkama različitim od A. No, vrh A je spojen dužinom iste boje s jednim od vrhova u tom stablu koja ne siječe nijedan brid tog stabla jer se nalazi na rubu konveksne ljuske. Time smo dobili jednobojno stablo u kojem se bridovi ne sijeku s N dužina.

U ostatku rješenja možemo pretpostaviti da sve dužine na rubu konveksne ljuske imaju istu boju. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da su sve te dužine crvene.

Uvedimo koordinatni sustav tako da sve dane točke imaju različite apscise. Neka su dane točke A_1, A_2, $\ldots$, A_{N+1} poredane prema apscisi.

Za $K = 2, \ldots, N$, prema pretpostavci inudkcije primjenjenoj na vrhove $A_1, \ldots, A_K$ postoji jednobojno stablo L_K kojem se bridovi ne sijeku, a primjenjenoj na vrhove $A_K, \ldots, A_{N+1}$ postoji jednobojno stablo R_K. Ako postoji K takav da su L_K i R_K iste boje, onda postoji jednobojno stablo na $N+1$ vrhova koje dobivamo unijom L_K i R_K. Pretpostavimo zato da su L_K i R_K različite boje za svaki K.

Ako je stablo R_2 crvene boje, onda tom stablu možemo dodati dužinu A_1A_2 s konveksne ljuske i tako konstruirati traženo stablo na N vrhova. Zato pretpostavljamo da je R_2 plave boje, te analogno da je L_N plave boje. Tada su L_2 i R_N crvene boje.

Budući da je L_2 crvene boje, a L_N plave boje, mora postojati K takav da je L_K crvene, a L_{K+1} plave boje. Tada je R_{K+1} crvene boje i postoji dužina $\overline{XY}$ na rubu konveksne ljuske takva da je X u stablu L_K, a Y u stablu R_{K+1} (npr. X i Y možemo odabrati kao točke u tim stablima s najvećom ordinatom). Unija stabala L_K, R_{K+1} i dužine $\overline{XY}$ je crveno stablo na $N+1$ vrhova kojem se bridovi ne sijeku (osim u vrhovima). Budući da smo u svim slučajevima došli do željenog zaključka, dokaz je završen.

Zadatak 3.

Točka O je središte kružnice opisane šiljastokutnom trokutu ABC. Točke E i F redom su odabrane na dužinama $\overline{OB}$ i $\overline{OC}$ tako da je $|BE| = |OF|$. Ako su M i N redom polovišta kružnih lukova $\widehat{EOA}$ i $\widehat{AOF}$, dokaži da je $\sphericalangle ENO + \sphericalangle OMF = 2\sphericalangle BAC$.

Rješenje.

Neka je $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle CBA = \beta$ i $\gamma = \sphericalangle ACB$.

Trokuti AME i AOB su jednakokračni i imaju istek kutove jer je $\sphericalangle AME = \sphericalangle AOE = 2\gamma$. Zato su ti trokuti slični.

Uočimo da je $\sphericalangle AOM = \sphericalangle AEM = 90° - \gamma = \sphericalangle ABE$, pa su trokuti AMO i AEB također slični. Slijedi $|OA| : |OM| = |AB| : |BE|$, tj. $|OB| : |OM| = |AB| : |OF|$.

Neka je točka A' osnosimetrična slika točke A obzirom na pravac BC.

Prema dokazanome vrijedi $|OB| : |OM| = |A'B| : |OF|$ i

$$\sphericalangle MOF = \sphericalangle AOF - \sphericalangle AOM = 2\beta - (90° - \gamma) = \beta + (90° - \alpha) = \sphericalangle A'BC + \sphericalangle CBO = \sphericalangle A'BO.$$

Prema S–K–S teoremu slijedi da su trokuti $A'BO$ i FOM slični, pa je posebno

$$\sphericalangle FMO = \sphericalangle A'OB.$$

Analogno se pokazuje da $\sphericalangle ENO = \sphericalangle A'OC$, pa je

$$\sphericalangle ENO + \sphericalangle FMO = \sphericalangle A'OC + \sphericalangle A'OB = \sphericalangle BOC = 2\sphericalangle BAC.$$

Zadatak 4.

Dan je prosti broj $p > 10^9$ takav da je $4p+1$ prost. Dokaži da decimalni zapis broja $\dfrac{1}{4p+1}$ sadrži sve znamenke $0, 1, \ldots, 9$.

Rješenje.

Neka je $q = 4p + 1$. Označimo s $a \circ b$ ostatak pri dijeljenju broja a brojem b. Dovoljno je pokazati da zadnje znamenke brojeva $10^k \circ q$ pokrivaju sve znamenke od 0 do 9. Zaista, budući da su q i 10 relativno prosti brojevi, to bi značilo da će se sve znamenke od 0 do 9 pojaviti među zadnjim znamenkama brojeva $\left\lfloor \frac{10^k}{q} \right\rfloor$ i to su znamenke iz decimalnog zapisa broja $\frac{1}{q}$.

Neka je S skup svih ne-nul bikvadratnih ostataka modulo q, tj. skup svih $0 < t < q$ takvih da kongruencija $x^4 \equiv t \pmod{q}$ ima rješenje. Tada S ima p elemenata. Zaista, budući da je -1 kvadratni ostatak modulo q, $2p$ ne-nul kvadratnih ostataka modulo q možemo podijeliti u parove oblika $(s, -s)$ i mđu njihovim kvadratima (koji su točno bikvadratnim ostaci) ima točno p različitih.

Pokazat ćemo da svaki element skupa S ima oblik $10^k \circ q$ za neki k. Naime, neka je d red broja q modulo 10. Tada je $d|\varphi(q) = 4p$ i imamo $d = p$, $d = 2p$ ili $d = 4p$.

Promotrimo prvo slučaj $d = p$. Tada je $0 \leqslant k < p$; tada postoji $0 \leqslant j \leqslant 3$ takav da je $k + jp$ višekratnik od 4 i broj

$$10^k \equiv \lfloor 10^{\frac{k+jp}{4}} \rfloor^4 \pmod{q}$$

je bikvadratni ostatak. Budući da su brojevi $10^k \circ q$ za $0 \leqslant k < p$ u parovima razlilčiti i svaki od njih je bikvadratni ostatak, svi se moraju podudarati sa skupovima u S.

Slučajeve $d = 2p$ i $d = 4p$ se rješavanju analogno.

Neka je sada u proizvoljna znamenka. Neka je $0 \leqslant j \leqslant 3$ takav da $u + jq$ završava na 0, 1, 5 ili 6. Budući da je $q > 10^9$, imamo $\sqrt[4]{(j+1)q - 1} - \sqrt[4]{u + jq} > 6$. Slijedi da interval $[u + jq, (j + 1)q]$ sadrži barem šest četvrtih potencija. Dakle, sadrži barem jednu četvrtu potenciju x^4 koja završava istom znamenkom kao $u+jq$. Neka je $s = x^4 \circ q$. Tada je $x^4 = s+jq$ i $10|x^4 - (u + jq) = s - u$, tj. s završava na u kao što je trebalo pokazati.

HRVATSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA

Završni test za izbor MEMO ekipe

Zagreb, 24. travnja 2016.

Zadatak 1.

Dana je funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da za sve realne brojeve x i y vrijedi

$$f(xf(y)) + f(x^2) = f(x)(x + f(y))$$

te da je $f(2) = 3$. Odredi $f(2^{2016})$.

Rješenje.

Uvrstimo li $x = 0$ i $y = 0$ u danu jednadžbu dobivamo $2f(0) = f(0)^2$. Zato razlikujemo dva slučaja $f(0) = 2$ i $f(0) = 0$.

Ako je $f(0) = 2$, onda uvrštavanjem $x = 1$, $y = 0$ dobivamo $f(f(0)) = f(1)f(0)$, odnosno $3 = f(2) = 2f(1)$. Tada je $f(1) = \frac{3}{2}$. Uvrstimo li $x = 0$, $y = 1$ dobivamo $2f(0) = f(0)f(1)$, što daje $f(0) = 0$, odnosno imamo kontradikciju.

Ako je $f(0) = 0$, onda uvrštavanjem $y = 0$ dobivamo $f(x^2) = f(x)x$, pa originalna jednadžba postaje $f(xf(y)) = f(x)f(y)$. Uvrstimo li $y = x$, dobivamo $f(xf(x)) = f(x^2)$.

Primijenimo li f na danu jednadžbu dobivamo

$$f(f(xf(y)) + f(x^2)) = f(f(x)(x + f(y))),$$

pa uvrštavanjem $x = y$ i korištenjem $f(xf(x)) = f(x^2)$ dobivamo

$$f(f(x^2)) = f(f(x)x) = f(x)^2.$$

Uvrstimo li $x = 1$ u $f(xf(y)) = f(x)f(y)$ dobivamo $f(f(y)) = f(1)f(y)$ što zajedno s $f(f(x^2)) = f(x)^2$ daje

$$xf(x)f(1) = f(x^2)f(1) = f(f(x^2)) = f(x)^2.$$

Dakle, za svaki x vrijedi $f(x) = xf(1)$ ili $f(x) = 0$.

Budući da je $f(2) \neq 0$ dobivamo $f(1) = \frac{3}{2}$.

Uvrstimo li $y = 2$ dobivamo $f(3x) = 3f(x)$, te iteriranjem dobivamo $f(3^{2016}) = \frac{1}{2} \cdot 3^{2017}$.

Uvrstimo li $y = 1$ dobivamo

$$f\left(\frac{3}{2}x\right) = \frac{3}{2}f(x),$$

što nam daje $f(2^{2016}) = 3 \cdot 2^{2015}$.

Da zaista postoji funkcija koja ima upravo te vrijednosti i zadovoljava danu jednadžbu vidimo zbog funkcije $f(x) = \frac{3}{2}x$.

Zadatak 2.

Može li se ploča 12×12 popločati L-trominima tako da svaki redak i svaki stupac siječe isti broj tromina?

L-tromino se sastoji od tri jedinična kvadrata koja se ne nalaze u istom stupcu ili retku.

Rješenje.

Pretpostavimo da je moguće popločati ploču na traženi način. Svaki tromino koji siječe prvi redak, mora siječi i drugi redak. Budući da u svim retcima imamo jednaki broj tromina, zaključujemo da sva tromina iz drugog retka moraju sijeći i prvi redak, tj. prvi i drugi redak možemo popločati trominama. Isti argument možemo primijeniti na prva dva stupca.

Iz toga slijedi da dio ploče dimenzija 2×2 koji se nalazi u prva dva stupca i prva dva retka možemo popločati trominama, što je očito nemoguće. Dakle, pretpostavka je bila pogrešna. Ploču 12×12 nije moguće popločati na traženi način.

Zadatak 3.

Dan je tetivni četverokut $ABCD$. Polupravci AD i BC sijeku se u točki P. U unutrašnjosti trokuta DCP dana je točka M takva da pravac PM raspolavlja kut $\sphericalangle CMD$. Pravac CM siječe kružnicu opisanu trokutu DMP ponovno u točki Q, a pravac DM siječe kružnicu opisanu trokutu CMP ponovno u točki R.

a) Dokaži da dužine $\overline{CQ}$ i $\overline{DR}$ imaju jednaku duljinu.

b) Dokaži da trokuti PAQ i PBR imaju jednaku površinu.

Rješenje. *(Matija Bašić)*

Neka je točka N na polupravcu PM takva da je M između P i N.

Budući da je četverokut $MPQD$ tetivan vrijedi

$$\sphericalangle PDQ = \sphericalangle PMQ = \sphericalangle CMN = \sphericalangle DMN = 180^\circ - \sphericalangle DMP = \sphericalangle DQP.$$

Dakle, trokut DPQ je jednakokračan. Analogno zaključujemo da je trokut CPR jednakokračan i sličan trokutu DPQ jer su im kutovi jednaki.

a) Vrijedi $|PQ| = |PD|$, $|PR| = |PC|$, te je zbog toga $\sphericalangle CPR = \sphericalangle DPQ$. Odatle slijedi $\sphericalangle CPQ = \sphericalangle DPR$. Po S–K–S teoremu trokuti RPD i CPQ su sukladni. Iz toga slijedi $|CQ| = |DR|$.

b) Označimo $\sphericalangle APQ = \sphericalangle BPR = \varphi$. Vrijedi

$$2P(APQ) = |AP| \cdot |PQ| \cdot \sin\varphi \quad \text{i} \quad 2P(BPR) = |BP| \cdot |PR| \cdot \sin\varphi.$$

Tvrdnja zadatka vrijedi ako je $|AP| \cdot |PQ| = |BP| \cdot |PR|$.
Zbog teorema o potenciji točke P na kružnicu opisanu četverokutu $ABCD$ vrijedi $|AP| \cdot |PD| = |BP| \cdot |PC|$, a onda zbog $|PQ| = |PD|$ i $|PR| = |PC|$ slijedi tvrdnja.

Zadatak 4.

Odredi sve parove prirodnih brojeva (m, n) takve da vrijedi

$$3 \cdot 5^m - 2 \cdot 6^n = 3.$$

Prvo rješenje. *(Ivan Kokan)*

Ako je $n = 1$, onda je $3 \cdot 5^m - 12 = 3$, odakle slijedi jedno rješenje $(m, n) = (1, 1)$.

Za $n = n_0 + 1 \geqslant 2$, $n_0 \in \mathbb{N}$, jednadžba prelazi u $5^m - 2 \cdot 2^{n_0+1} \cdot 3^{n_0} = 1$, odnosno

$$5^m - 1 = 4 \cdot 6^{n_0}.$$

Budući da je desna strana djeljiva brojem 6, slijedi da je m paran broj, tj. $m = 2m_0$, $m_0 \in \mathbb{N}$.

Zatim imamo

$$(5^{m_0} - 1)(5^{m_0} + 1) = 4 \cdot 6^{n_0}.$$

Budući da je $M(5^{m_0} + 1, 5^{m_0} - 1) = M(5^{m_0} - 1, 2) = 2$, možemo pisati $5^{m_0} + 1 = 2 \cdot 3^{n_0}$, $5^{m_0} - 1 = 2^{n_0+1}$.

Oduzimanjem i dijeljenjem s 2 dobivamo $1 = 3^{n_0} - 2^{n_0}$, što je moguće samo za $n_0 = 1$. Za $n_0 > 1$ je razlika na desnoj strani veća od 1. Za $n_0 = 1$ imamo $m_0 = 1$, tj. rješenje $(m, n) = (2, 2)$.

Drugo rješenje. *(Marijan Polić)*

Zapišemo jednadžbu kao $3(5^x - 1) = 2 \cdot 6^y$.

Uvrštavanje $y = 1$ daje $x = 1$, a $y = 2$ daje $x = 2$. Pretpostavimo $y > 2$. Tada 6 mora dijeliti $5^x - 1$, a $5^x - 1 \equiv (-1)^x - 1 \pmod 6$, pa mora biti $x = 2x_0$ za neki prirodan x_0. Jednadžba postaje

$$2 \cdot 6^y = 3(25^{x_0} - 1) = 3 \cdot 24(25^{x_0-1} + \cdots + 25 + 1).$$

Budući da je $y > 2$ i broj $(25^{x_0-1} + \cdots + 25 + 1)$ mora biti djeljiv sa 6, a imamo

$$25^{x_0-1} + \cdots + 25 + 1 \equiv \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{x_0 \text{ puta}} \equiv x_0 \pmod 6.$$

Slijedi $x_0 = 6x_1$, odnosno $x = 12x_1$ za neki prirodan x_1. Jednadžba je ekvivalentna jednadžbi

$$2 \cdot 6^y = 3(5^{12} - 1)(5^{12(x_1-1)} + 5^{12(x_1-2)} + \cdots + 5^{12} + 1).$$

Desna strana je djeljiva sa $5^2 + 1$, pa i sa 13, a lijeva nije. Stoga su $(1, 1)$ i $(2, 2)$ jedina moguća rješenja.