POUČAK O UZASTOPNOM PREBROJAVANJU

ZORAN ZORIĆ, Split

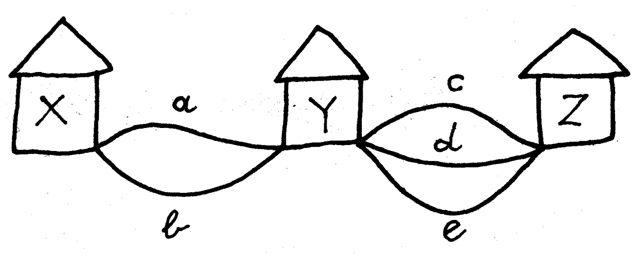
Roko putuje iz Zagreba u Stari Grad na otoku Hvaru. Iz Zagreba leti zrakoplovom do Splita, a dalje plovi trajektom. Želi putovanje završiti u istom danu, ali i zadržati se neko vrijeme u Splitu u svog rođaka Vedrana. Pogledajmo na koliko načina to može obaviti.

RED VOŽNJE

Dolazak zrakoplova u Split	Polazak trajekta za Stari Grad	Boravak u Splitu
8 h	13 h	5 sati
	20 h	12 sati
10 h	13 h	3 sata
	20 h	10 sati

Iz reda vožnje vidljivo je da dnevno za Split lete dva zrakoplova. Nakon leta putovanje može nastaviti jednim od dva trajekta koja plove za Stari Grad. Roko ima $2 \cdot 2 = 4$ načina da izvede to putovanje.

Sad zamislimo da u gradu postoje tri tajanstvene kuće — X, Y i Z — u kojima žive krijumčari. Svakog dana njihov šef obilazi sve tri kuće. Pri tome doručkuje u X, ruča u Y i večera u Z. Ali policija mu je na tragu. Zato se on uvijek kreće drugim putem. Od X do Y može koristiti ulice a i b, a od Y do Z ulice c, d i e (sl. 1).

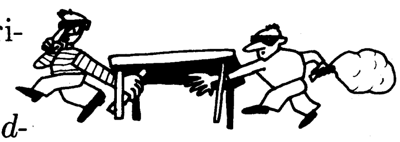


Slika 1.

Glavni inspektor zaokupljen je velikim problemom: kako uhititi šefa krijumčara? Pomognimo mu malo. Načinimo listu putova koje krijumčar može koristiti:

1. $X - a - Y - c - Z$
2. $X - a - Y - d - Z$
3. $X - a - Y - e - Z$
4. $X - b - Y - c - Z$
5. $X - b - Y - d - Z$
6. $X - b - Y - e - Z$

Ostavimo policiji da riješi ovaj problem, a mi iz ove dvije pričice izvucimo matematički dio sadržaja.



Princip množenja. *Ako ima n načina da se izvrši jedna radnja i nakon toga m načina da se izvrši druga radnja, onda ima ukupno $n \cdot m$ načina da se izvedu obje radnje zajedno.*

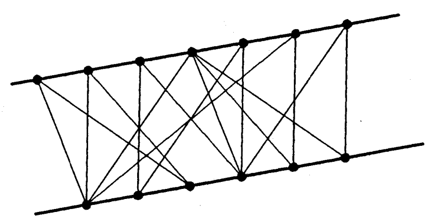
Vratimo se na trenutak problemu našeg inspektora. Ako krijumčar od X do Y može doći na dva načina, a od Y do Z na tri načina, onda ima ukupno $2 \cdot 3 = 6$ načina (princip množenja) da se od X dođe do Z.

Princip množenja koristi se u rješavanju raznih problema iz područja kombinatorike, što ćemo objasniti na nekoliko primjera.

Zadatak 1. Koliko ima prirodnih dvoznamenkastih brojeva?

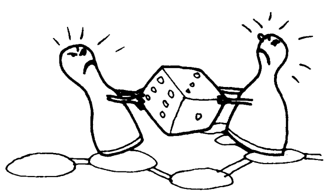
Rješenje. Prva je radnja biranje znamenke desetica, a druga biranje znamenke jedinica. Na mjestu desetica može se pojaviti bilo koja znamenka različita od nule (dakle: 9 mogućnosti), a na mjestu jedinica bilo koja znamenka uključujući i nulu (dakle: 10 mogućnosti). Traženih brojeva ima ukupno $9 \cdot 10 = 90$.

Zadatak 2. Zadana su dva usporedna pravca p i r. Na pravcu p zadano je 7 točaka, a na pravcu r 6 točaka. Koliko ima dužina kojima je jedna krajnja točka neka od 7 zadanih s pravca p, a druga krajnja točka neka od 6 zadanih s pravca r?



Rješenje. U ovom slučaju prva radnja je biranje točke na pravcu p, a druga biranje točke na pravcu r. Dužina ukupno ima $7 \cdot 6 = 42$.

Princip množenja može se poopćiti za bilo koji konačan broj radnji.

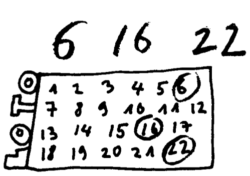


Zadatak 3. Koliko se troznamenkastih brojeva može dobiti tako da tri puta bacamo kocku (označenu brojevima od 1 do 6) i svaki put zapišemo broj koji nam se pojavi (jedan do drugoga, slijeva nadesno)?

Rješenje. Svako bacanje kocke shvatimo kao radnju koja nam može dati 6 ishoda. Traženih je brojeva $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

Zadatak 4. Koliko ima prirodnih deseteroznamenkastih brojeva u kojih su (unutar svakog broja) sve znamenke međusobno različite?

Rješenje. Na prvom mjestu može se pojaviti bilo koja znamenka različita od nule (dakle: 9 mogućnosti); na drugom mjestu bilo koja od preostalih 9 znamenaka; na trećem mjestu bilo koja od preostalih 8 znamenaka, itd. Traženih brojeva ima $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3\,265\,920$.



Zadatak 5. Koliko različitih kombinacija trebaš ispuniti da bi bio siguran da ćeš na sportskoj prognozi ispuniti "trinaesticu" (na listiću ima 13 parova, za svaki par moguća su tri tipa: 1, 2, 0).

Rješenje. 1 594 323. Obrazloži sam!

Zadatak 6. Koliko različitih djelitelja ima broj 144? $(144 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3^2.)$

Rješenje. Ako bilo koji djelitelj broja 144 rastavimo na proste faktore, onda se on mora sastojati od nekoliko dvojki i nekoliko trojki (npr. djelitelj $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$). Dvojka se kao faktor može pojaviti ili 0 ili 1 ili 2 ili 3 ili 4 puta (dakle: 5 mogućnosti); trojka se kao faktor može pojaviti ili 0 ili 1 ili 2 ili 3 puta (dakle: 3 mogućnosti). Djelitelja ima ukupno $5 \cdot 3 = 15$. Ako se oba faktora (i dvojka i trojka) "pojave nula puta", tad je djelitelj broj 1.

Evo na kraju nekoliko zadataka za vježbu:

Zadatak 1. Koliko ima "simetričnih" troznamenkastih brojeva (simetrični se brojevi jednako pišu slijeva nadesno i zdesna nalijevo, npr. 727)?

Zadatak 2. Kojih "simetričnih" brojeva ima više, peteroznamenkastih ili šesteroznamenkastih?

Zadatak 3. Koliko se peteroznamenkastih brojeva može napisati pomoću znamenaka $0, 1, 2, 3, 4$:

a) ako se znamenke smiju ponavljati;

b) ako se znamenke smiju ponavljati i ako su pri tome brojevi djeljivi s 5;

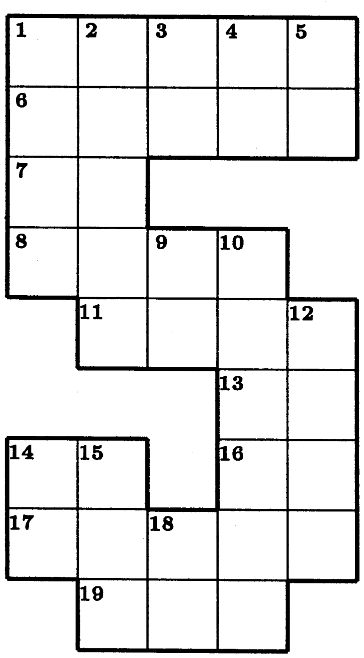
c) ako su sve znamenke različite;

d) ako su sve znamenke različite i ako su pri tome brojevi djeljivi s 10?

Zadatak 4. Koliko se u Splitu može registrirati automobila? Svaka registarska oznaka pored skraćenice ST sastoji se od 5 znakova, pri čemu prva tri znaka tvore troznamenkasti broj, četvrti znak je slovo, a peti je znak ili slovo ili prazno mjesto (npr. ST 192–B, ST 520–BO). Pretpostavljamo da se znamenke i slova mogu ponavljati, ali da se pri tome ne koriste slova č, ć, dž, đ, lj, nj, š, ž.

Zadatak 5. Koliko različitih djelitelja ima broj $a = 2^7 \cdot 3^5 \cdot 5$?

Zadatak 6. Koliko ima četveroznamenkastih brojeva u kojima se pojavljuje barem jedna znamenka 5?



Mala matematička križaljka

VODORAVNO: 1. Vrijednost izraza $81a(a+1)(a+2)(a+3)+81$ za $a=\frac{7}{3}$. **6.** $8\cdot 8\cdot 8\cdot 8\cdot 8$,. **7.** Rješenje jednadžbe $\frac{x-1}{7}-\frac{x+1}{11}-2=0$. **8.** $3\cdot 3\cdot 3+11\cdot 11\cdot 11+12\cdot 12\cdot 12+13\cdot 13\cdot 13+14\cdot 14\cdot 14$. **11.** $12^2+51^2+84^2$. **13.** Broj dužina što ih određuje deset točaka na pravcu. **14.** $D(1932, 3795)$. **16.** Najveći dvoznamenkasti prost broj. **17.** $V(52, 106, 1007)$. **19.** Zbroj kvadrata prvih trinaest prirodnih brojeva.

OKOMITO: 1. Oplošje kvadra kojemu su duljine bridova tri uzastopna prirodna broja, a volumen jednak 3360. **2.** $44\cdot 44\cdot 44-35\cdot 35\cdot 35$. **3.** $LXVII$. **4.** Zbroj znamenaka najvećega šesteroznamenkastog broja djeljivog sa 17. **5.** Broj minuta potrebnih da automobil prevali put duljine 36 kilometara brzinom od 120 kilometara na sat. **9.** 0.175% od 16000. **10.** Volumen kocke kojoj je duljina brida jednaka 89. **12.** $MDLXXIV$. **14.** Rješenje jednadžbe $x+\frac{1}{2}(x+3)+\frac{1}{3}(x+7)=123$. **15.** Površina pravokutnika čiji je opseg 122, a jedna stranica za 3 dulja od druge. **18.** Najveći prosti djelitelj broja 54901.