Zadaci za učenike osnovnih škola – Teorija brojeva

1. zadatak: Odredi sve prirodne brojeve n za koje je $\dfrac{n-1}{n-5}$ cijeli broj.

2. zadatak: Postoji li prirodan broj n takav da zbroj $1+2+\ldots+n$ završava znamenkama 2014?

3. zadatak: Odredi sve prirodne brojeve n takve da je

$$3^{2n+1} - 4^{n+1} + 6^n$$

prost broj.

4. zadatak: Mario je napisao 30-znamenkasti prirodni broj čiji je zbroj znamenaka 123. Zatim je iza tog broja dopisao još jednom sve njegove znamenke u nekom drugom poretku. Dokaži da dobiveni 60-znamenkasti broj nije kvadrat prirodnog broja.

5. zadatak: Odredi sve različite proste brojeve p, q i r takve da je

$$3p^4 - 5q^4 - 4r^2 = 26.$$

Zadaci za učenike osnovnih škola – Geometrija

1. zadatak: Vrhovi peterokuta $ABCDE$ leže na istoj kružnici. Ako je $\angle CAD = 50°$, odredi

$$\angle ABC + \angle AED.$$

2. zadatak: Neka je ABC trokut u kojem je najdulja stranica $\overline{BC}$, a kut $\angle BCA$ tri puta veći od kuta $\angle ABC$. Simetrala vanjskog kuta kod vrha A siječe pravac BC u točki A_0, a simetrala vanjskog kuta kod vrha B siječe pravac AC u točki B_0. Ako je $|AA_0| = |BB_0|$, odredi kutove danog trokuta.

3. zadatak: Zbroj duljina krakova trapeza iznosi $4\sqrt{10}$, a duljina visine 6. Površina trapeza je 72. Ako je taj trapez upisan u kružnicu, odredi polumjer te kružnice.

4. zadatak: Dužina $\overline{AB}$ je promjer kružnice sa središtem O. Na kružnici je dana točka C takva da je OC okomito na AB. Na kraćem luku BC odabrana je točka P. Pravci CP i AB sijeku se u točki Q, a točka R je sjecište pravca AP i okomice kroz Q na pravac AB.

Dokaži da je $|BQ| = |QR|$.

5. zadatak: Promatrajmo šiljastokutni trokut ABC. Neka je D nožište visine iz točke C na stranicu $\overline{AB}$, te neka su M i N nožišta visina iz točke D na stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$, redom. Ako su H_1 i H_2 ortocentri trokuta MNC i MND, dokažite da je površina četverokuta AH_1BH_2 jednaka površini trokuta ABC.

Zadaci za učenike osnovnih škola – Kombinatorika

1. zadatak: Pravokutnik dimenzija 5×6 podijeljen je na osam pravokutnika čije su stranice paralelne sa stranicama polaznog pravokutnika, a duljine stranica su im prirodni brojevi. Dokaži da su barem dva od tih osam pravokutnika međusobno sukladna.

2. zadatak: Na n kartica napisane su rečenice:

"*Barem k rečenica lijevo od ove kartice je lažno.*"

za $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Kartice su složene u nekom redoslijedu slijeva nadesno. Koliko najviše rečenica može biti istinito?

3. zadatak: Na igralištu se nalazi 2014 sportaša koji na dresovima imaju brojeve od 1 do 2014 (svaki broj je na točno jednom dresu). Na početku su svi u stojećem položaju. U određenim vremenskim intervalima trener uzvikuje redom sve prirodne brojeve od 1 do 2014. Sportaši kojima je na dresu višekratnik uzviknutoga broja odmah mijenjaju svoj položaj iz stojećeg položaja u čučanj ili obratno.

Koliko je sportaša u čučnju nakon što trener uzvikne broj 2014?

4. zadatak: Ploča 8×8 na početku je obojena u dvije boje, crnu i bijelu, tako da su polja koja imaju zajedničku stranicu različitih boja, kao standardna šahovska ploča na slici. U pojedinom potezu treba odabrati jedan redak ili stupac i svakom od osam polja u tom retku ili stupcu promijeniti boju iz crne u bijelu ili obratno. Može li se konačnim nizom takvih poteza postići da točno jedno polje na ploči bude crno?

5. zadatak: Svaka od 2009 različitih točaka u ravnini obojena je plavom ili crvenom bojom, tako da se na svakoj jediničnoj kružnici sa središtem u plavoj točki nalaze točno dvije crvene točke. Odredi najveći mogući broj plavih točaka.

Zadaci za učenike osnovnih škola – Algebra

1. zadatak: Izračunaj sumu

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}.$$

2. zadatak: Ana ima četiri puta toliko godina koliko je imao Petar kada je Ana imala toliko godina koliko Petar ima sada. Kada Petar bude imao toliko godina koliko Ana ima sada, oboje zajedno će imati 95 godina. Koliko godina ima Ana, a koliko Petar?

3. zadatak: Odredi sve uređene trojke (x, y, z) realnih brojeva za koje vrijedi

$$\begin{cases} x+y=\sqrt{28} \\ xy-2z^2=7. \end{cases}$$

4. zadatak: Neka su a i b duljine kateta, a c duljina hipotenuze pravokutnog trokuta. Dokaži da vrijedi

$$\left(1+\frac{c}{a}\right)\left(1+\frac{c}{b}\right)\geq 3+2\sqrt{2}.$$

5. zadatak: Odredi sve realne brojeve a, b, c, d takve da je $a+b+c+d=20$ i $ab+ac+ad+bc+bd+cd=150$.