MALO KOMBINATORNE GEOMETRIJE

Tvrtko Tadić, 1. razred, V. gimnazija, Zagreb

Na natjecanjima se uvijek pojavljuju zanimljivi zadatci iz geometrije koji često zadaju probleme natjecateljima. Te zadatke najčešće ne možemo ni nacrtati. Oni su obično iz kombinatorne geometrije. Mnogi će se zapitati što je uopće *kombinatorna geometrija*? Taj dio geometrije je relativno nov, star približno 40 godina. Za kombinatornu geometriju karakteristično je da su formulacije vrlo jednostavne i razumljive svim **Matkačima**. Međutim, unatoč jednostavnim formulacijama, zadatci nisu nimalo lagani. Kombinatorna geometrija se svodi na jednostavne zakonitosti i svega nekoliko pravila koja se najviše rabe pri rješavanju zadataka.

1. Dirichletovo pravilo - najčešće se rabi prilikom smještanja točaka u geometrijski lik.

2. Pravilo ekstremnog - odabiremo najveći ili najmanji element (dužinu, površinu, ...) za rješavanje zadatka.

3. Pravilo stalnog - rabimo nešto stalno i povezujemo s onim što je zadano.

Među uvjetima zadatka koji trebamo riješiti često se javlja konačan skup (točaka, pravaca, ...). Natjecatelji i drugi učenici koji rješavaju ovakve zadatke uglavnom nisu naviknuti na konačnost skupa. U nekim se zadatcima pojavljuju i veliki brojevi, kao primjerice 12 345, no taj je broj mogao biti bilo koji broj ili nekakva nepoznanica n.

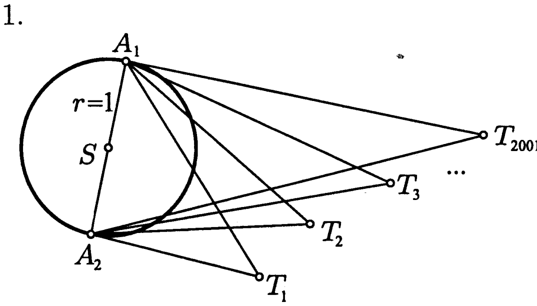
$$\boxed{d_n = \frac{n(n-3)}{2}}$$

Primjer 1. Dokažimo da u svakom konveksnom jedanaesterokutu postoje barem dvije dijagonale koje zatvaraju kut manji od 5°.

Rješenje. Budući da je riječ o konveksnom mnogokutu, svake dvije dijagonale zatvaraju neki kut. Translatirajmo dijagonale tako da se sijeku u jednoj točki. Budući da jedanaesterokut ima 44 dijagonale, one dijele kut od 360° na 88 dijelova. Kad među tim dijelovima ne bi postojao kut manji od 5°, zbroj veličina svih kutova bio bi veći od 360°, što je nemoguće.

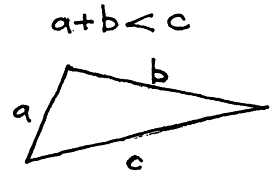
Primjer 2. Zadana je 2001 točka. Dokažimo da na bilo kojoj kružnici polumjera $r = 1$ postoji točka A takva da je zbroj udaljenosti od nje do zadanih točaka veći ili jednak 2001.

Rješenje. Promotrimo sliku 1.



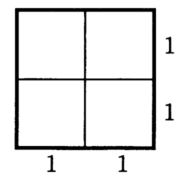
Slika 1.

Zbog nejednakosti trokuta vrijedi sljedeća nejednakost: $|T_1A_1| + |T_1A_2| \geq |A_1A_2| = 2r = 2$. (Uočite da jednakost vrijedi jedino u slučaju da je točka T_1 na dužini $\overline{A_1A_2}$.) Analogne nejednakosti vrijede za svaku točku T_i, $i = 1, 2, \ldots, 2001$. Zbrajanjem tih nejednakosti dobivamo da je



$$(|T_1A_1|+|T_2A_1|+\ldots+|T_{2001}A_1|)+(|T_1A_2|+|T_2A_2|+\ldots+|T_{2001}A_2|) \geq 4002.$$

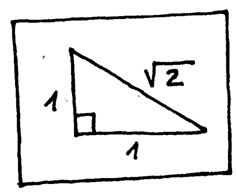
Vrijednost jedne od zagrada mora biti veća ili jednaka 2001, jer bi u suprotnom njihov zbroj bio manji od 4002. Dakle, točka A_1 ili točka A_2 su tražene točke.



Slika 2.

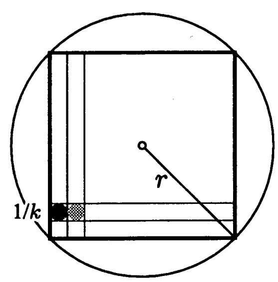
Primjer 3. Ako unutar kvadrata sa stranicom duljine 2 rasporedimo pet točaka, onda postoji bar jedan par točaka čija je udaljenost manja od $\sqrt{2}$. Dokažimo tu tvrdnju.

Rješenje. Razdijelimo li kvadrat na četiri jedinična kvadratića (vidi sl. 2.), tada će se (prema Dirichletovu pravilu) u barem jednom od njih naći najmanje dvije od tih pet točaka. Udaljenost dviju točaka mora biti manja od dijagonale jediničnog kvadratića, dakle, od $\sqrt{2}$.



Primjer 4. Možemo li u krug promjera $2r = \sqrt{2}$ smjestiti neki broj krugova tako da nemaju zajedničkih točaka, a da je zbroj njihovih polumjera jednak 2001?

Rješenje. Promotrimo sliku 3.

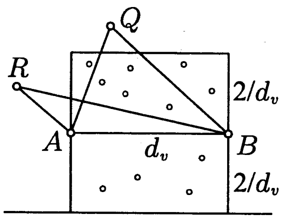


Slika 3.

U kružnicu upišemo kvadrat koji podijelimo na k^2 manjih kvadratića. U svaki od njih upišemo kružnicu (koja omeđuje krug). Prema Pitagorinu poučku, duljina stranice velikog kvadrata iznosi 1, što znači da su polumjeri malih kružnica jednaki $r_m = \dfrac{1}{2k}$. No, naši se krugovi diraju, pa ćemo svakome od njih ostaviti isto središte, a polumjer prepoloviti. Dakle, promatrat ćemo male krugove kojima je polumjer jednak $r_n = \dfrac{1}{4k}$.

Naših malih krugova ima k^2, što znači da zbroj njihovih polumjera iznosi $S = \dfrac{1}{4k} \cdot k^2 = \dfrac{k}{4}$. Budući da je zadano $S = 2001$, zaključujemo da je moguće upisati kružnice ako je $\dfrac{k}{4} = 2001$. Odatle slijedi da je $k = 8004$, što znači da je naš postupak moguć.

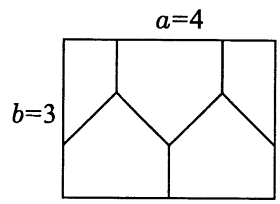
Primjer 5. Zadano je 3000 točaka takvih da svake tri čine trokut čija je površina manja od 1. Dokažimo da se sve ove točke mogu smjestiti u pravokutnik površine 4.



Slika 4.

Rješenje. Promotrimo sliku 4. Nađimo najveću udaljenost između tih točaka. Neka je to udaljenost između točaka A i B, i označimo je d_v. S obje strane dužine $\overline{AB}$ konstruirajmo pravokutnike kojima je druga stranica duga $\frac{2}{d_v}$. Za svaku točku R koja leži izvan pruge što je čine okomice na dužinu $\overline{AB}$ vrijedi da je $|AR| > |AB|$ ili $|BR| > |AB|$, što je nemoguće jer je $|AB| = d_v$ najveća udaljenost danih točaka. Za svaku točku Q koja leži izvan pruge što je čine pravci usporedni s AB (na udaljenosti $\frac{2}{d_v}$) vrijedi da joj je duljina visine na stranicu $\overline{AB}$ veća od $\frac{2}{d_v}$, pa je $P(\triangle ABQ) > 1$, što je suprotno uvjetu zadatka. Dakle, svaka od točaka danih u zadatku leži unutar tih pravokutnika, a njegova je površina jednaka 4.

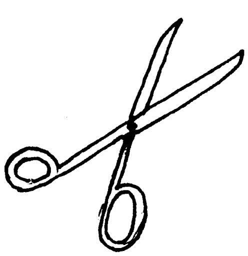
Primjer 6. U pravokutnik sa stranicama duljine $a = 4$ i $b = 3$ raspoređeno je šest točaka. Dokažimo da postoje dvije točke čija je udaljenost manja ili jednaka $\sqrt{5}$.



Slika 5.

Rješenje. Najprije moramo zadani pravokutnik podijeliti na likove u kojima će najveća moguća udaljenost točaka biti $\sqrt{5}$. Najprije pomišljamo na pravokutnik sa stranicama duljine 2 i 1, no takvih je u danom pravokutniku ukupno 6. Zato radimo drukčiju podjelu, kao na slici 5.

U dobivenim je likovima najveća udaljenost upravo $\sqrt{5}$. Zadanih 6 točaka raspoređeno je u ovih 5 likova, pa prema Dirichletovom pravilu zaključujemo da se u jednom nastalom liku moraju nalaziti najmanje dvije točke. Budući da je u svakom od tih likova najveća moguća udaljenost točaka $\sqrt{5}$, tvrdnja je dokazana.



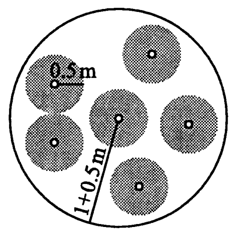
Primjer 7. U ravnini je zadano 25 točaka sa svojstvom da za svaki izbor triju od tih točaka uvijek postoje dvije čija je udaljenost manja od 1. Dokažimo da postoji krug polumjera $r = 1$ kojim se može prekriti najmanje 13 danih točaka.

Rješenje. Nađimo najveću udaljenost, tj. najdulju dužinu koju određuje tih 25 točaka. Nazovimo tu dužinu $\overline{PQ}$. Preostale 23 točke spojimo s točkama P i Q. Tako dobivamo trokute kojima je uvijek duljina najmanje jedne stranice manja od 1. Nacrtali smo, dakle, najmanje 23 dužine duljine manje od 1, koje izlaze iz rubnih točaka P i Q najdulje dužine. Jednoj od rubnih točaka, primjerice točki Q, pripada najmanje 12 tih dužina (Dirichletovo pravilo). Opišemo li oko točke Q kružnicu polumjera $r = 1$, dobivamo krug koji prekriva najmanje 13 danih točaka.

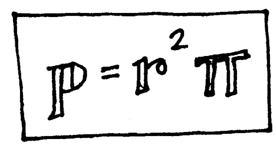
Primjer 8. U ravnini je zadano 7000 točaka takvih da je udaljenost svake dvije manja od 1. Ako je n najmanja udaljenost između točaka, dokažimo da vrijedi da je

$$n < \frac{2}{\sqrt{7000}-1}.$$

Rješenje. Sve dane točke možemo smjestiti unutar kružnice polumjera $r = 1$. Budući da je n najmanja udaljenost među danim točkama, oko svake od njih možemo opisati krug polumjera $r_1 = \frac{1}{2}n$. Svi dobiveni krugovi mogu se smjestiti unutar kruga polumjera $r_2 = 1 + \frac{1}{2}n$ (vidi sl. 6).



Slika 6.



Očito je zbroj površina manjih krugova manji od površine velikog kruga. Zato vrijedi da je $7000 \cdot r_1^2\pi < r_2^2\pi$. Uvrstimo li vrijednosti za r_1 i r_2, dobit ćemo da je

$$7000 \cdot \left(\frac{1}{2}n\right)^2 \pi < \left(1 + \frac{1}{2}n\right)^2 \pi.$$

Posljednju nejednakost podijelimo s π, a zatim korjenujemo. Dobit ćemo redom da je:

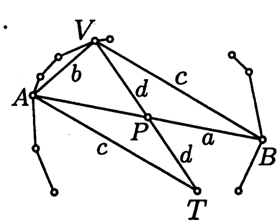
$$\frac{1}{2}n \cdot \sqrt{7000} < 1 + \frac{1}{2}n,$$

$$\frac{1}{2}n(\sqrt{7000} - 1) < 1.$$

Rješenje ove nejednadžbe je $n < \frac{2}{\sqrt{7000}-1}$.

Primjer 9. Dokažimo da se u krug polumjera $r = \frac{1}{4}$ može smjestiti mnogokut opsega 1.

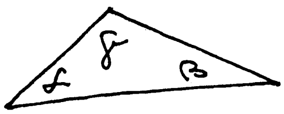
Rješenje. Neka su s A i B označeni vrhovi danog mnogokuta, koji opseg tog mnogokuta dijele na dva jednaka dijela. Polovište P dužine $\overline{AB}$ spojimo dužinom s bilo kojim vrhom V promatranoga mnogokuta. Neka je $|PV| = d$ (vidi sl. 7.).



Slika 7.

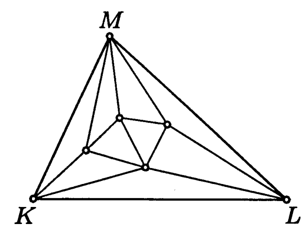
Produljimo dužinu $\overline{VP}$ preko točke P za duljinu d do točke T. Za trokut ATV vrijedi da je $2d < b + c$ (nejednakost trokuta). Budući da je $b + c$ manje od polovice opsega danog mnogokuta, zaključujemo da je $b + c < \frac{1}{2}$. Dakle, $2d < b + c < \frac{1}{2}$, tj. $2d < \frac{1}{2}$, što znači da je $d < \frac{1}{4}$. To znači da se u krug sa središtem u točki P može smjestiti mnogokut opsega 1.

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$



Primjer 10. U ravnini su zadane 1003 točke takve da svake tri čine trokut i da postoje tri točke, nazovimo ih K, L i M, koje čine trokut unutar kojeg je preostalih 1000 točaka. Koliko postoji trokuta koji su unutar trokuta KLM i koji nemaju zajedničkih unutarnjih točaka?

Rješenje. Zbroj veličina unutarnjih kutova manjih trokuta (uz uvjet da nemaju zajedničkih unutarnjih točaka) je stalan, bez obzira na raspored tih točaka unutar trokuta KLM. Oko svake od 1000 označenih točaka zbroj nastalih kutova je 360°, a u svakome trokutu zbroj veličina unutarnjih kutova je 180° (vidi sl. 8).



Slika 8.

Označimo li s t broj traženih trokuta, za zbroj njihovih unutarnjih kutova vrijedi jednakost:

$$180^\circ \cdot t = 1000 \cdot 360^\circ + 180^\circ.$$

Odatle slijedi da je

$$t = (1000 \cdot 360^\circ + 180^\circ) : 180^\circ = 2001.$$

Dakle, unutar trokuta KLM postoji 2001 trokut koji zadovoljava uvjete zadatka.

Zadatci

1. Dokažite da se u krug polumjera $r = 9$ ne može smjestiti 400 točaka takvih da udaljenost između svake dvije točke bude veća od 1.
2. Unutar kružnice polumjera 1 razmješteno je 9 točaka. Dokažite da među njima postoje 3 točke koje čine trokut čija je površina najviše 0.5.
3. Zadan je konveksan 1985-erokut opsega 2500. Dokažite da postoje tri njegova vrha koji određuju trokut s površinom manjom od 1.
4. Zadano je 3000 točaka takvih da svake tri čine trokut čija je površina manja od 1. Dokažite da se sve ove točke mogu smjestiti u trokut površine 4.
5. Zadano je 5 točaka takvih da ne postoje 3 koje leže na istome pravcu i ne postoje 4 koje leže na istoj kružnici. Dokažite da postoji kružnica koja prolazi kroz tri dane točke, takva da četvrta točka leži unutar te kružnice, a peta izvan nje.