NELINEARNE DIOFANTSKE JEDNADŽBE

Marija Golac, Zagreb

U Matki br. 6. opisano je kako se rješavaju linearne diofantske jednadžbe. U ovom članku pozabavit ćemo se nelinearnim diofantskim jednadžbama. Tu je situacija složenija. Naime, 1900. god. na svjetskom kongresu matematičara D. Hilbert[1] postavio je 23 problema čije je rješenje držao važnim za daljnji razvoj matematike u 20. stoljeću. Neki od tih problema nisu ni do danas riješeni. Za temu ovog članka interesantan je tzv. deseti Hilbertov problem: "Neka je zadana bilo koja diofantska jednadžba s proizvoljno puno nepoznanica..., treba naći opću metodu pomoću koje se nakon konačnog broja koraka može utvrditi ima li ta jednadžba cjelobrojnih rješenja ili nema."

Taj je problem riješen tek 1970. god., a riješio ga je ruski matematičar Jurij V. Matijasevič. Odgovor je bio negativan.

Mi međutim znamo da za neke tipove diofantskih jednadžbi postoje algoritmi[2] (sustavni postupci) pomoću kojih se takve jednadžbe rješavaju. U prije spomenutom članku vidjeli smo da za linearnu diofantsku jednadžbu $ax + by = c$, (a, b, c cijeli brojevi, $a \neq 0$, $b \neq 0$) takav algoritam postoji i on je nazvan Eulerovom metodom. *Nelinearnim diofantskim jednadžbama* zovemo jednadžbe s cjelobrojnim koeficijentima u kojima se nepoznanice ne pojavljuju u prvoj potenciji već one sadrže i članove višeg reda, kao npr. x^2, xy, y^3, itd.

Mi ćemo se sada pozabaviti metodama rješavanja nekih takvih jednadžbi. Prema prije rečenome odmah valja naglasiti da se ne može svaka nelinearna diofantska jednadžba riješiti jednom od metoda s kojima ćemo se sada upoznati.

1. Metoda faktorizacije. Sastoji se u tome da se jednadžba napiše u obliku jednakosti u kojoj je na jednoj strani umnožak polinoma, a na drugoj cijeli broj. Taj se cijeli broj na sve moguće načine rastavi na faktore i onda se polinomi izjednačavaju s tim faktorima.

[1] David Hilbert (1862.–1943.), njemački matematičar.

[2] Riječ algoritam je u čast uzbekistanskog matematičara al–Horezmija (787.–oko 850.). Prevodilac njegova djela "De numero indorum" (O hindu brojevima) površno je latinizirao njegovo ime u Algorithmus. Al–Horezmi je prvi koristio sustavne postupke, tj. algoritme pri rješavanju mnogih problema zadataka. Mnogi smatraju da je današnji decimalni zapis brojeva njegovo otkriće.

Ilustrirajmo to na primjerima.

Primjer 1. Neka se odrede sva cjelobrojna rješenja jednadžbe

$$xy - y + 2x = 4.$$

Rješenje. Pokušajmo rastaviti na faktore lijevu stranu. Očito se jednadžba može napisati u obliku

$$y(x-1) + 2x = 4.$$

Oduzmimo sada i od lijeve i desne strane 2, dobivamo

$$(x-1)y + 2x - 2 = 2,$$

tj.

$$(x-1)y + 2(x-1) = 2,$$

odnosno

$$(x-1)(y+2) = 2.$$

Kako su djeljitelji od 2 brojevi 1, 2, -1, -2 to imamo četiri mogućnosti:

a) $x - 1 = 1$, $y + 2 = 2$, pa je $x = 2$, $y = 0$, dakle uređen par $(2, 0)$ je jedno rješenje.

b) $x - 1 = 2$, $y + 2 = 1$, tj. $x = 3$, $y = -1$, pa je $(3, -1)$ drugo rješenje.

c) $x - 1 = -1$, $y + 2 = -2$, tj. $x = 0$, $y = -4$ i $(0, -4)$ je treće rješenje.

d) $x - 1 = -2$, $y + 2 = -1$ i $(-1, -3)$ je četvrto rješenje.

Jednadžba nema drugih rješenja.

Primjer 2. Odredite sve prirodne brojeve koje kad uvećamo za 5 dobijemo potpun kvadrat i kad ih umanjimo za 11, dobivamo opet potpun kvadrat.

Rješenje. Neka je traženi broj jednak n. Tada prema uvjetu zadatka moramo odrediti prirodne brojeve x i y takve da je $n + 5 = x^2$ i $n - 11 = y^2$. Oduzimanjem ovih jednadžbi dobivamo:

$$x^2 - y^2 = 16,$$

ili

$$(x-y)(x+y)=16.$$

Sada imamo ove mogućnosti:

a) $x+y=16$, $x-y=1$. Rješenje ovog sustava je $x=\frac{17}{2}$, $y=\frac{15}{2}$, a to nisu prirodni brojevi.

b) $x+y=1$, $x-y=16$, pa je $x=\frac{17}{2}$, $y=-\frac{15}{2}$, a to nisu prirodni brojevi.

c) $x+y=8$, $x-y=2$. Odavde je $x=5$, $y=3$, pa je $n=x^2-5=11+y^2=20$. Dakle, $n=20$ je jedno rješenje.

d) $x+y=2$, $x-y=8$ daje $x=5$, $y=-3$, pa je opet $n=20$.

e) $x+y=4$, $x-y=4$ daje $x=4$, $y=0$, pa je $n=11$ drugo rješenje.

Jedini traženi brojevi jesu 11 i 20. Zaista $11+5=4^2$, $11-11=0^2$, $20+5=5^2$, $20-11=3^2$.

Primjer 3. Odredite duljine stranica pravokutnog trokuta ako one imaju cijeli broj centimetara, a jedna kateta ima duljinu 37 cm.

RJEŠENJE. Neka je x duljina hipotenuze, a y duljina druge katete. Tada prema Pitagorinu poučku vrijedi:

$$x^2-y^2=37^2,$$

tj.

$$(x-y)(x+y)=37^2.$$

Kako je $x>y$, $x-y>0$ i $x+y>x-y$, to iz gornje jednadžbe slijedi $x-y=1$, $x+y=37^2$. Rješenje ovog sustava je $x=685$, $y=684$. Dakle, druga kateta ima duljinu 684 cm, a hipotenuza 685 cm.

Ako imate strpljenja, provjerite da je zaista $37^2+684^2=685^2$.

* * *

2. Metoda dijeljenja. Ova je metoda slična Eulerovoj metodi za rješavanje linearnih diofantskih jednadžbi, a sastoji se u tome da se jedna nepoznanica izrazi pomoću druge i onda se primijeni dijeljenje.

Pokažimo to na primjerima.

Primjer 4. Riješite u skupu prirodnih brojeva jednadžbu:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{13}.$$

RJEŠENJE. Pomnožimo li ovu jednadžbu s $13xy$, dobit ćemo:

$$13x + 13y = xy.$$

Izrazimo sada y pomoću x. Imamo redom:

$$xy - 13y = 13x,$$

tj.

$$y(x - 13) = 13x$$

i konačno

$$y = \frac{13x}{x - 13}.$$

Sada se postupa kao i u Eulerovoj metodi, tj. brojnik se dijeli s nazivnikom:

$$y = \frac{13x - 169 + 169}{x - 13} = 13 + \frac{169}{x - 13}.$$

Iz ovog izraza razabiremo da je y prirodan broj samo ako je $x_1 = 14$, $x_2 = 26$, $x_3 = 182$, pa je $y_1 = 182$, $y_2 = 26$, $y_3 = 14$.

Dakle, jednadžbu zadovoljavaju samo parovi $(14, 182)$, $(26, 26)$, $(182, 14)$.

Primjer 5. Koji dvoznamenkasti broj ima svojstvo da je jednak dvostrukom umnošku svojih znamenaka?

Rješenje. Označimo znamenku desetica s x, a znamenku jedinica s y. Tada je traženi broj oblika $10x + y$. Prema uvjetu zadatka mora vrijediti

$$10x + y = 2xy.$$

Odavde je:

$$y = \frac{10x}{2x-1},$$

ili

$$y = \frac{10x - 5 + 5}{2x - 1},$$

tj.

$$y = 5 + \frac{5}{2x-1}.$$

Razlomak na desnoj strani je prirodan broj samo za $x = 1$ i $x = 3$. Za $x = 1$ je $y = 5 + 5 = 10$, što je nemoguće jer je y znamenka jedinica, pa to može biti samo jedan od brojeva iz skupa $\{0, 1, \ldots, 9\}$. Za $x = 3$, dobiva se $y = 6$, pa je 36 jedini dvoznamenkasti broj s navedenim svojstvom.

Primjer 6. Nađite četveroznamenkasti broj kojemu su prve dvije znamenke jednake, posljednje dvije znamenke jednake i koji je kvadrat prirodnog broja.

Rješenje. Traženi broj je oblika $1000x + 100x + 10y + y$.

Prema uvjetu zadatka mora vrijediti

$$1100x + 11y = z^2,$$

gdje je z neki prirodni broj. Lijeva strana ove jednadžbe je djeljiva s 11, pa mora biti i desna, čak i više, tj. z mora biti djeljiv s 11 jer je 11 prost broj. Dakle, z je oblika $z = 11t$, pa se jednadžba može pisati u obliku

$$100x + y = 11t^2.$$

Odavde je

$$t^2 = \frac{100x + y}{11},$$

odnosno

$$t^2 = 9x + \frac{x+y}{11}.$$

Zaključujemo da zbog toga jer su x i y znamenke traženog broja, mora vrijediti $x+y=11$. Kako je x prva znamenka, to je $x \neq 0$.

Međutim, $x > 1$ jer bismo za $x=1$ imali $y=10$, što je nemoguće.

Kako kvadrati prirodnih brojeva završavaju na 1, 4, 5, 6, 9, to od svih rješenja jednadžbe $x+y=11$ u obzir dolaze samo parovi $(7,4)$, $(6,5)$, $(5,6)$, $(2,9)$.

Dakle, radi se o brojevima 7744, 6655, 5566 i 2299. Od njih je potpun kvadrat samo $7744 = 88^2$ i to je jedino rješenje zadatka.

Zadaci za vježbu

Zadatak 1. Riješite u skupu cijelih brojeva metodom faktorizacije ove jednadžbe:

a) $x^2 - 4y^2 = 4$, b) $xy - 3x + y = 2$,

c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{13}$, d) $x^2 - xy - 2y^2 = 18$.

Rješenje. a) $(2,0)$, $(-2,0)$; b) $(0,2)$, $(-2,4)$; c) $(14,182)$, $(26,26)$, $(182,14)$, $(12,-156)$, $(-156,12)$; d) $(4,-1)$, $(5,1)$, $(-4,1)$, $(-5,-1)$.

Zadatak 2. Riješite u skupu prirodnih brojeva jednadžbu $2^x + 1 = y^2$.

Rješenje. $(3,3)$.

Zadatak 3. U prošlom je stoljeću u Francuskoj živio pastir H. Monde, koji je imao izuzetne računarske sposobnosti. Jednom je prilikom bio pozvan u Akademiju znanosti u Parizu kako bi se ispitale te sposobnosti. Tom mu je prilikom postavljen zadatak da nađe dva prirodna broja čija je razlika kvadrata 133. H. Monde je za samo dvije sekunde riješio taj zadatak. Riješite ga i vi.

Rješenje. To su brojevi 67 i 66, te 13 i 6.

Zadatak 4. Dokažite da razlika troznamenkastog broja i broja koji je napisan istim znamenkama, ali u obrnutom redoslijedu, ne može biti kvadrat prirodnog broja.

Zadatak 5. Brojevi 12 i 60 imaju interesantno svojstvo: njihov je umnožak jednak njihovu deseterostrukom zbroju. Ima još parova dvoznamenkastih brojeva s tim svojstvom. Odredite ih sve.

Rješenje. Traženi parovi brojeva su: 12 i 60, 11 i 110, 14 i 35, 15 i 30, 20 i 20.

Zadatak 6. Duljine stranica pravokutnog trokuta imaju cijeli broj centimetara, a duljina jedne njegove katete je 55 cm. Odredite opseg i površinu onog od takvih trokuta koji imaju najmanju hipotenuzu.

Rješenje. $o = 176\,\mathrm{cm}$, $P = 1320\,\mathrm{cm}^2$.

Zadatak 7. Riješite u skupu cijelih brojeva metodom dijeljenja ove jednadžbe

a) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{xy} = 1$, b) $xy + 1 = x + 3y$,

c) $x - xy - 3y = 2$, d) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{y} + \dfrac{7}{xy} = 1$.

Rješenje. a) $(2,3)$, $(3,2)$ b) $(5,2)$, $(1,0)$, $(4,3)$, $(2,-1)$, c) $(-8,2)$, $(2,0)$, $(-4,6)$, $(-2,-4)$, d) $(2,15)$, $(12,5)$, $(-10,3)$.

Zadatak 8. Nađite najmanji prirodni broj koji pri dijeljenju sa 7 daje ostatak 6, a njegov kvadrat pri dijeljenju sa 7^2 daje ostatak 43.

Rješenje. Traženi broj je 27.