

1. Hrvatska juniorska matematička olimpijada

18. lipnja 2017.

1. Neka su a i b cijeli brojevi takvi da je broj $(a+b)(a+3b)$ djeljiv sa 4, ali nije djeljiv sa 8. Dokaži da je tada broj $(a+b)(a+3b)(a+5b)$ djeljiv sa 8, ali nije djeljiv sa 16.

2. Izračunaj zbroj

$$\frac{1^2 + 2^2}{1 \cdot 2} + \frac{2^2 + 3^2}{2 \cdot 3} + \frac{3^2 + 4^2}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{99^2 + 100^2}{99 \cdot 100}.$$

3. Neka je ABC pravokutan trokut s pravim kutom u vrhu C . Kružnica k s promjerom \overline{AC} siječe stranicu \overline{AB} u točki D , a tangenta na kružnicu k u točki D siječe stranicu \overline{BC} u točki E . Kružnica opisana trokutu CDE siječe stranicu \overline{AB} u točkama D i F . Odredi omjer površina trokuta ABC i BEF .

4. Svako polje ploče 9×9 je obojeno plavom ili crvenom bojom. Za redak kažemo da je *pretežno crven* ako ima više crvenih nego plavih polja, a za stupac kažemo da je *pretežno plav* ako ima više plavih nego crvenih polja. Neka je C broj pretežno crvenih redaka, a P broj pretežno plavih stupaca.

a) Može li biti $C + P = 18$?

b) Može li biti $C + P = 17$?

c) Može li biti $C + P = 16$?

Vrijeme rješavanja: 4 sata

Svaki zadatak vrijedi 10 bodova.