MINISTARSTVO ZNANOSTI I OBRAZOVANJA REPUBLIKE HRVATSKE
AGENCIJA ZA ODGOJ I OBRAZOVANJE
HRVATSKO MATEMATIČKO DRUŠTVO

DRŽAVNO NATJECANJE
IZ MATEMATIKE
Primošten, 3.travnja-5.travnja 2017.

8. razred-osnovna škola

1. Zadan je pravilni šesterokut $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Točke P_1 i P_2 su polovišta stranica $\overline{A_4A_5}$ i $\overline{A_3A_4}$. Koliki je omjer površina trokuta $\Delta P_1A_1P_2$ i pravilnog šesterokuta $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$?

2. Riješi sustav jednadžbi:
$$(x+y)^2-z^2=1,\quad (y+z)^2-x^2=5,\quad (z+x)^2-y^2=10.$$

3. Neka su p i q zadani različiti prosti brojevi. Nađi sve uređene parove (m, n) prirodnih brojeva koji zadovoljavaju jednadžbu $p\cdot m+q\cdot n=m\cdot n$.

4. Neka je H nožište visine trokuta ΔABC povučene iz vrha C. Neka su R i S redom točke u kojima kružnice upisane trokutima ΔAHC i ΔBCH diraju $\overline{CH}$. Ako je $|AB|=2018$, $|AC|=2017$ i $|BC|=2016$, izračunaj $|RS|$.

5. Dvadeset učenika koji sudjeluju na kampu iz matematike odlučili su međusobno poslati poruke i to svaki od njih točno desetorici preostalih učenika. Odredi najmanji mogući broj obostranih poruka, tj. nađi primjer rasporeda slanja poruka u kojem je broj obostranih poruka najmanji mogući i dokaži da manji broj obostranih poruka nije moguće postići.
(Kažemo da je poruka između učenika A i B obostrana ako vrijedi da je učenik A poslao poruku učeniku B i da je učenik B poslao poruku učeniku A.)

Svaki se zadatak boduje s 10 bodova.
Nije dopuštena uporaba džepnog računala niti bilo kakvih priručnika.