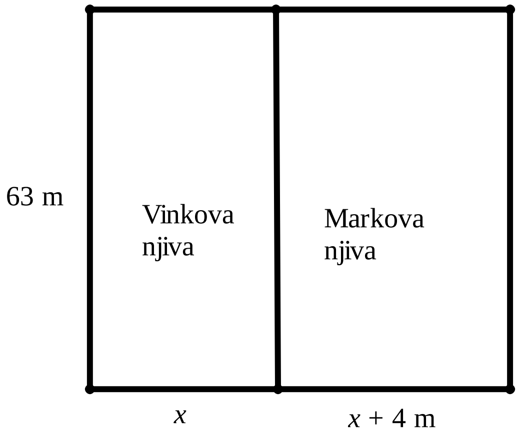
DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Primošten, 3.travnja-5.travnja 2017.

5. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Neka je x širina Vinkove njive. Tada je $x + 4$ m širina kupljene njive.



Stoga vrijedi:
$63 \cdot (x + x + 4) = 2016$
$2 \cdot x + 4 = 2016 : 63$
$2 \cdot x + 4 = 32$
$2 \cdot x = 32 - 4$
$2 \cdot x = 28$
$x = 14$
Markova njiva ima širinu 14 + 4 = 18 m.
Površina Markove njive je $63 \cdot 18 = 1134\ m^2$.
Cijena koju je Vinko platio je $1134 \cdot 150 = 170\ 100$ kn.

2. Prvi način:
$1 + 1\cdot2 + 1\cdot2\cdot3 + 1\cdot2\cdot3\cdot4 + 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 + 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6 + \ldots + 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot14 + 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot14\cdot15 =$
$= 1 + 2 + 6 + 24 + 120 + 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot(1 + 7 + 7\cdot8 + 7\cdot8\cdot9 + \ldots + 7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15) =$
$= 153 + 720\cdot(1 + 7 + 7\cdot8 + 7\cdot8\cdot9 + \ldots + 7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15) =$
$= 9 + 144 + 72\cdot10\cdot(1 + 7 + 7\cdot8 + 7\cdot8\cdot9 + \ldots + 7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15) =$
$= 9 + 72\cdot2 + 72\cdot10\cdot(1 + 7 + 7\cdot8 + 7\cdot8\cdot9 + \ldots + 7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15) =$
$= 9 + 72\cdot[2 + 10\cdot(1 + 7 + 7\cdot8 + 7\cdot8\cdot9 + \ldots + 7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15)]$
Prema tome, traženi ostatak je 9.

Drugi način:
Kako je $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6 = 720$, svi pribrojnici nakon petog su djeljivi sa 720, pa i sa 72, jer je $720 = 72\cdot10$.
Općenito vrijedi: ako su svi pribrojnici djeljivi nekim brojem k, onda je i njihov zbroj djeljiv istim tim brojem k.

Zbog toga je zbroj 1·2·3·4·5·6 +…+ 1·2·3·4·…·14 + 1·2·3·4·…·14·15 djeljiv sa 72.
Ostaje provjeriti zbroj prvih pet pribrojnika:
1 + 1·2 + 1·2·3 + 1·2·3·4 + 1·2·3·4·5 = 1 + 2 + 6 + 24 + 120 = 153.
Podijelimo zbroj prvih pet pribrojnika sa 72:

  153 : 72 = 2
– 144
     9

Prema tome, traženi ostatak je 9.

3. Kut podijelimo na dva dijela: x i $2x$. Tada je:
$x+2x=315°$
$3x=315°$
$x=105°$
$2x=210°$
$315°=105°+210°$

Kut podijelimo na tri dijela: x, $2x$ i $4x$. Tada je:
$x+2x+4x=315°$
$7x=315°$
$x=45°$
$2x=90°$, $4x=180°$
$315°=45°+90°+180°$

Kut podijelimo na četiri dijela: x, $2x$, $4x$ i $8x$. Tada je:
$x+2x+4x+8x=315°$
$15x=315°$
$x=21°$
$2x=42°$, $4x=84°$, $8x=168°$
$315°=21°+42°+84°+168°$

Kut podijelimo na pet dijelova: x, $2x$, $4x$, $8x$ i $16x$. Tada je:
$x+2x+4x+8x+16x=315°$
$31x=315°$
Broj 315 nije djeljiv brojem 31, pa nije moguća podjela na pet dijelova uz zadani uvjet da je svaki sljedeći dio dvostruko veći od prethodnog.

Kut podijelimo na šest dijelova: x, $2x$, $4x$, $8x$, $16x$ i $32x$. Tada je:
$x+2x+4x+8x+16x+32x=315°$
$63x=315°$
$x=5°$
$2x=10°$, $4x=20°$, $8x=40°$, $16x=80°$, $32x=160°$
$315°=5°+10°+20°+40°+80°+160°$

Ako kut dijelimo na 7 ili 8 dijelova uz zadane uvjete, dobijemo jednadžbe $127x=315°$ i $255x=315°$ koje nemaju rješenje u skupu prirodnih brojeva.
Ako kut dijelimo na 9 i više dijelova uz zadane uvjete, dobijemo da je najmanji dio x manji od 1°, pa ne može biti prirodan broj.
Dakle, na opisani način kut veličine 315° možemo podijeliti na 2, 3, 4 i 6 dijelova.

4. Sve brojeve upisane u tablicu rastavimo na proste faktore.

$243 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$
$245 = 5 \cdot 7 \cdot 7$
$64 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
$50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$
$70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$
$45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$
$840 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

Brojeve iz tablice zamijenimo dobivenim rastavima.

				3·3·3·3·3
				5·7·7
				2·2·2·2·2·2
				2·5·5
2·5·7	3·3·5	2·2·2·3·5·7	2·2·2·3·3	

Promotrimo brojeve rastava u drugom redu. Broj 7 se pojavljuje dva puta, a broj 5 jednom. Kako se 7 pojavljuje po jednom u prvom i trećem stupcu, očito je da u prvom i trećem stupcu drugog retka mora biti broj 7. Tada broj 5 mora biti u drugom stupcu (jer u četvrtom nema broja 5). Sva tri broja u drugom redu su raspoređena, pa u četvrtom stupcu tog retka mora biti broj 1.

				243
7	5	7	1	245
				64
				50
70	45	840	72	

Na sličan način riješimo i četvrti redak. Broj 5 mora biti u prvom i trećem stupcu (faktor 5 iz drugog stupca već je iskorišten). Broj 2 može biti samo u četvrtom stupcu, a u drugom je onda broj 1.

				243
7	5	7	1	245
				64
5	1	5	2	50
70	45	840	72	

Svi brojevi u prvom redu tvore se pomoću broja 3. Usporedbom s „trojkama“ u pojedinim stupcima može se zaključiti da u prvom stupcu mora biti broj 1, u drugom 9, u trećem 3 i u četvrtom 9.

1	9	3	9	243
7	5	7	1	245
				64
5	1	5	2	50
70	45	840	72	

U trećem su redu samo „dvojke“. U prvom stupcu je 2, u drugom 1, u trećem 8, a u četvrtom 4.

1	9	3	9	243
7	5	7	1	245
2	1	8	4	64
5	1	5	2	50
70	45	840	72	

5. Zadatak rješavamo unatrag.

Odredimo broj *a*:

Zbroj podijelimo brojem 20 i dobijemo *x*: $20 \cdot x$

Umnošku dodamo 15: $20 \cdot x - 15$

Razliku pomnožimo brojem 5: $(20 \cdot x - 15) : 5 = 4 \cdot x - 3$

Od broja *a* oduzmemo 3: $4 \cdot x - 3 + 3 = 4 \cdot x$

Prema tome je $a = 4 \cdot x$.

Odredimo broj *b*:

$y = 2 \cdot x$

Od umnoška oduzmemo 22 i dobijemo *y*: $2 \cdot x + 22$

Zbroj pomnožimo brojem 2: $(2 \cdot x + 22) : 2 = x + 11$

Količniku dodamo 6: $x + 11 - 6 = x + 5$

Broj *b* podijelimo brojem 8: $(x + 5) \cdot 8 = 8 \cdot x + 40$

Prema tome je $b = 8 \cdot x + 40$.

Broj *a* tri je puta manji od broja *b*, pa vrijedi:

$3 \cdot a = b$

$3 \cdot (4 \cdot x) = 8 \cdot x + 40$

$12 \cdot x = 8 \cdot x + 40$

$12 \cdot x - 8 \cdot x = 40$

$4 \cdot x = 40$

$x = 40 : 4$

$x = 10$

$a = 4 \cdot x = 4 \cdot 10 = 40$

$b = 8 \cdot x + 40 = 8 \cdot 10 + 40 = 80 + 40 = 120$ ili $b = 3 \cdot a = 3 \cdot 40 = 120$

Broj *a* je 40, a broj *b* je 120.