DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – B varijanta

Primošten, 4. travnja 2017.

Zadatak B-1.1.

Odredite sve uređene parove cijelih brojeva (a, x), za koje vrijedi

$$2|x-1|+a|x-3|=3a+5-x.$$

Rješenje.

Prvi slučaj. Ako je $x \leqslant 1$, početna jednadžba prelazi u

$$\begin{aligned} 2(-x+1)+a(-x+3)&=3a+5-x, \\ -x(a+1)&=3, \\ x&=\frac{-3}{a+1}. \end{aligned}$$

Ovaj će izraz biti cijeli broj samo ako je $a+1 \in\{-3,-1,1,3\}$ odnosno ako je $a \in\{-4,-2,0,2\}$. Kako je $x \leqslant 1$, jedina moguća rješenja su:

za $a=-4$, $x=1$, za $a=0$, $x=-3$, za $a=2$, $x=-1$.

Drugi slučaj. Ako je $1<x \leqslant 3$, početna jednadžba prelazi u

$$\begin{aligned} 2(x-1)+a(-x+3)&=3a+5-x, \\ x(3-a)&=7, \\ x&=\frac{7}{3-a}. \end{aligned}$$

Ovaj će izraz biti cijeli broj samo ako je $3-a \in\{-7,-1,1,7\}$ odnosno ako je $a \in\{10,4,2,-4\}$.

Kako treba biti $1<x \leqslant 3$, u ovom slučaju nema rješenja.

Treći slučaj. Ako je $x>3$, početna jednadžba prelazi u

$$\begin{aligned} 2(x-1)+a(x-3)&=3a+5-x, \\ x(3+a)&=6a+7, \\ x=\frac{6a+7}{a+3}&=\frac{6(a+3)-11}{a+3}=6-\frac{11}{a+3}. \end{aligned}$$

Ovaj će izraz biti cijeli broj samo ako je $a+3 \in\{-11,-1,1,11\}$ odnosno ako je $a \in\{-14,-4,-2,8\}$. Kako je $x>3$, jedina moguća rješenja su:

za $a=-14$, $x=7$, za $a=-4$, $x=17$, za $a=8$, $x=5$.

Konačno, traženi uređeni parovi (a, x) su $(-14,7)$, $(-4,1)$, $(-4,17)$, $(0,-3)$, $(2,-1)$, $(8,5)$.

Zadatak B-1.2.

Profesor Mate je pokušavao zapamtiti četveroznamenkasti PIN, ali mu to nikako nije išlo od ruke. Zato je na jednoj strani papira, umjesto stvarnog PIN-a zapisao broj 2017, a na drugoj strani čemu je taj broj jednak: $\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+a$, gdje su a, b, c, d znamenke Matinog PIN-a. Odredite broj Matinog PIN-a.

Rješenje.

Vrijedi

$$\begin{gathered}\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+a=2017,\\(1000a+100b+10c+d)+(100a+10b+c)+(10a+b)+a=2017,\\1111a+111b+11c+d=2017,\end{gathered}$$

pri čemu su $a, b, c, d \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ i $a \neq 0$.

Uočimo da znamenka a ne može biti veća od 1 jer bi u protivnom broj na lijevoj strani bio veći od 2017. Stoga je $a=1$.

Tada je

$$\begin{gathered}111b+11c+d=2017-1111,\\111b+11c+d=906.\end{gathered}$$

Analogno zaključujemo da je $b<9$ jer bi u protivnom broj na lijevoj strani bio veći od 906.

Ako je $b=7$, slijedi $11c+d=129$, što nije moguće jer maksimalna vrijednost brojeva c i d iznosi 9.

Stoga je $b=8$. Tada je $11c+d=18$, što je moguće jedino ako je $c=1$ i $d=7$.

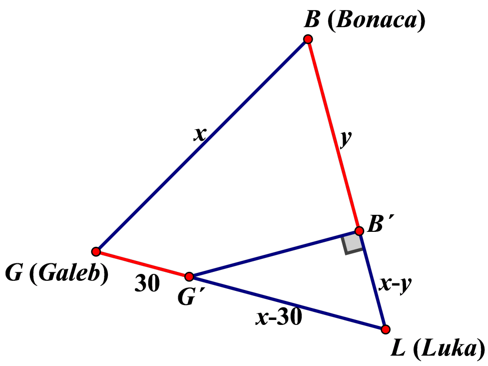
Traženi PIN je 1817.

Provjera: $1817+181+18+1=2017$.

Zadatak B-1.3.

Brodovi Bonaca i Galeb plove pravocrtno i konstantnom brzinom prema istoj luci. U podne pozicije luke i brodova određuju vrhove jednakostraničnog trokuta. U trenutku kada je brod Galeb prešao 30 km, pozicije luke i brodova određuju vrhove pravokutnog trokuta. Kada je brod Bonaca uplovio u luku, Galebu je do luke još preostalo prijeći 12.5 km. Koliko su brodovi bili međusobno udaljeni u podne?

Rješenje.



Neka su L, B i G vrhovi jednakostraničnog trokuta, odnosno pozicije luke te brodova Bonaca i Galeb u podne.

Uočimo da je brzina broda Bonaca veća od brzine broda Galeb jer je brod Bonaca ranije uplovio u luku. To znači da će u trenutku kad je Galeb prešao 30 km, a Bonaca y (km) vrijediti $y > 30$, te je vrh pravog kuta, pravokutnog trokuta $LB'G'$, u točki B'.

Neka je $|BG| = x$, $|GG'| = 30\,\text{km}$. Kako je trokut $LB'G'$ pravokutan, vrijedi

$$\begin{aligned}
|G'L| &= x - 30 \\
|B'L| &= x - y = \frac{x-30}{2} \\
|BB'| &= |BL| - |B'L| = x - \frac{x-30}{2} = \frac{x+30}{2}.
\end{aligned}$$

Brodovi se kreću konstantnim brzinama, pa je omjer prevaljenih udaljenosti za vrijeme t konstantan i vrijedi:

$$\begin{aligned}
\frac{x+30}{2} : 30 &= x : (x - 12.5) \\
\frac{x+30}{2} \cdot \left(x - \frac{25}{2}\right) &= 30 \cdot x \\
2x^2 - 85x - 750 &= 0 \\
2x^2 - 100x + 15x - 750 &= 0 \\
2x(x-50) + 15(x-50) &= 0 \\
(x-50)(2x+15) &= 0.
\end{aligned}$$

Slijedi $x = 50$, odnosno udaljenost između brodova u podne je iznosila 50 km.

Zadatak B-1.4.

Dužina $\overline{AB}$ podijeljena je redom od vrha A točkama T_1, T_2, T_3,..., T_{2016} na 2017 jednakih dijelova. Ako su poznate koordinate točaka $T_3(5, -1)$ i $T_4(8, -3)$, odredite koordinate točaka A i B. Može li razlika koordinata za neku od točaka T_1, T_2, T_3,..., T_{2016} iznositi 2016? Ako takve točke postoje, odredite njihove koordinate.

Rješenje.

Svaka je od točaka T_k polovište dužine $\overline{T_{k-1}T_{k+1}}$. Iz $x_{T_3} = \frac{1}{2}(x_{T_2} + x_{T_4})$ i $y_{T_3} = \frac{1}{2}(y_{T_2} + y_{T_4})$ dobivamo $T_2(2, 1)$. Analogno, dobivamo $A(-4, 5)$. Do istog rezultata možemo doći i promatranjem udaljenosti između točaka.

Ako su sve točke međusobno jednako udaljene, tada je razlika apscisa (odnosno ordinata) svih parova uzastopnih točaka, uvijek isti broj. Dakle, apscise svih točaka se razlikuju za 3 i iznose redom $-4, -1, 2, 5, 8, 11, \ldots$, a ordinate se razlikuju za -2 i iznose redom $5, 3, 1, -1, -3, -5, \ldots$

Općenito vrijedi: apscisa točke T_k je oblika: $-4 + 3k$, za $k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 2017\}$, ordinata točke T_k je oblika: $5 + k \cdot (-2)$, za $k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 2017\}$.

Koristeći navedeni zaključak dobivamo koordinate točke $B = T_{2017}$: $B(6047, -4029)$.

Promotrimo razliku koordinata neke točke T_k.

$$|(5-2k)-(-4+3k)| = 2016,$$
$$|9-5k| = 2016,$$
$$9-5k = 2016 \quad \text{ili} \quad 9-5k = -2016.$$

Broj k je prirodan broj, pa je jedino moguća druga jednakost, odnosno $5k = 2025$, $k = 405$.

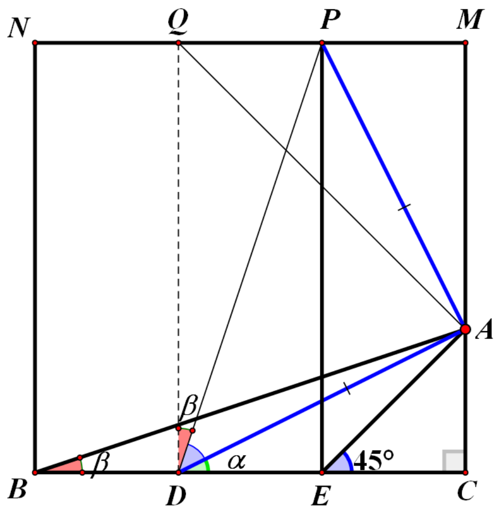
Tražena točka je $T_{405}(1211, -805)$.

Zadatak B-1.5.

U pravokutnom trokutu ABC, s pravim kutom u C, točke D i E dijele stranicu $\overline{BC}$ na tri jednaka dijela (točka D je bliža točki B). Ako je $|BC| = 3|AC|$, dokažite da je $\sphericalangle AEC + \sphericalangle ADC + \sphericalangle ABC = 90°$.

Prvo rješenje.

Nadopunimo pravokutni trokut do kvadrata $BCMN$, kao na slici. Neka su P i Q točke koje dužinu $\overline{MN}$ dijele na tri jednaka dijela.
Tada je prema uvjetima u zadatku: $\sphericalangle ADC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$, $\sphericalangle AEC = 45°$, a $\triangle ACE$ je jednakokračni pravokutni trokut.
Trebamo pokazati da je $\sphericalangle AEC + \sphericalangle ADC + \sphericalangle ABC = 90°$ što je ekvivalentno s $45° + \alpha + \beta = 90°$ odnosno $\alpha + \beta = 45°$.
Kako je $\triangle ACD \cong \triangle PMA$, slijedi $|AD| = |AP|$ i $\sphericalangle DAP = 90°$. Dakle, trokut DAP je jednakokračni pravokutni trokut tj. $\sphericalangle ADP = 45°$.
Iz $\triangle ABC \cong \triangle DQP$ slijedi $\sphericalangle PDQ = \sphericalangle ABC = \beta$.
Kako je $\sphericalangle ADC + \sphericalangle ADP + \sphericalangle ADQ = 90°$, slijedi $a + 45° + \beta = 90°$ odnosno $\alpha + \beta = 45°$ što je i trebalo dokazati.



Drugo rješenje.

Pretpostavimo da je $|AC| = 1$, tada je $|DE| = 1$, $|EA| = \sqrt{2}$, $|EB| = 2$, $|AD| = \sqrt{5}$, $|BA| = \sqrt{10}$.

Kako je $\dfrac{|DE|}{|EA|} = \dfrac{|EA|}{|EB|} = \dfrac{|AD|}{|BA|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, slijedi $\triangle DEA \sim \triangle AEB$ te je $\sphericalangle EAD = \sphericalangle ABC = \beta$.

Dakle $\alpha + \beta = 45°$ (vanjski kut trokuta EAD koji nema zajednički vrh).

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – B varijanta

Primošten, 4. travnja 2017.

Zadatak B-2.1.

Odredite zajedničke tangente parabola $y = x^2 - 6x + 12$ i $y = -x^2 + 8x - 17$.

Rješenje.

Pravac $t \dots\ y = kx + l$ će biti tangenta parabole $p_1 \dots\ y = x^2 - 6x + 12$ ako i samo ako sustav

$$\begin{cases} y = kx + l \\ y = x^2 - 6x + 12 \end{cases}$$

ima točno jedno rješenje.

Uvrštavanjem y iz prve jednadžbe sustava u drugu, dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$x^2 - (6 + k)x + 12 - l = 0,$$

a ona ima jedinstveno rješenje ako je diskriminanta jednaka nula, odnosno

$$(6 + k)^2 - 4(12 - l) = 0. \tag{1}$$

Analogno, pravac $t \dots\ y = kx + l$ će biti tangenta parabole $p_2 \dots\ y = -x^2 + 8x - 17$ ako i samo ako sustav

$$\begin{cases} y = kx + l \\ y = -x^2 + 8x - 17 \end{cases}$$

ima točno jedno rješenje.

Uvrštavanjem y iz prve jednadžbe sustava u drugu, dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$-x^2 + (8 - k)x - 17 - l = 0,$$

a ona ima jedinstveno rješenje ako je diskriminanta jednaka nula, odnosno

$$(8 - k)^2 - 4(17 + l) = 0. \tag{2}$$

Rješavanjem sustava (1) i (2) dobivamo $k_1 = 4$ i $l_1 = -13$, te $k_2 = -2$ i $l_2 = 8$. Dakle, tražene tangente su $t_1 \dots\ y = 4x - 13$ i $t_2 \dots\ y = -2x + 8$.

Zadatak B-2.2.

Riješite jednadžbu $(16^{-x} - 2)^3 + (4^{-x} - 4)^3 = (16^{-x} + 4^{-x} - 6)^3$.

Rješenje.

Uvedimo supstituciju $16^{-x}-2=a$ i $4^{-x}-4=b$. Tada dana jednadžba prelazi u $a^3+b^3=(a+b)^3$. Slijedi:

$$
\begin{aligned}
& a^3+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\
& 3ab(a+b)=0 \\
& a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a+b=0.
\end{aligned}
$$

Ako je $a=0$ tada je $16^{-x}-2=0$, odnosno $x=-\frac{1}{4}$.

Ako je $b=0$ tada je $4^{-x}-4=0$, odnosno $x=-1$.

Ako je $a+b=0$ tada je $16^{-x}+4^{-x}-6=0$. Uvedimo supstituciju $t=4^{-x}$.

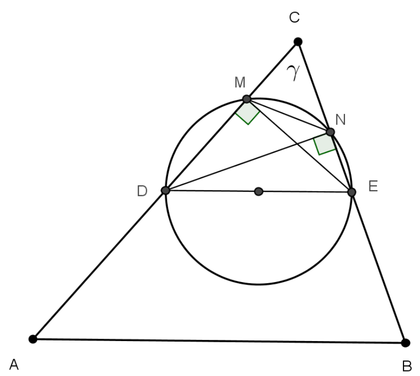
Tada je $t^2+t-6=0$, odnosno $t=2$ ili $t=-3$. Kako je $t>0$, mora biti $t=2$, odnosno $x=-\frac{1}{2}$.

Dakle, skup rješenja dane jednadžbe je $\left\{-1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right\}$.

Zadatak B-2.3.

Neka je $\overline{DE}$ srednjica trokuta ABC paralelna sa stranicom $\overline{AB}$. Nad srednjicom $\overline{DE}$ kao promjerom konstruirana je kružnica koja siječe $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ redom u točkama M i N. Dokažite da je $|\overline{MN}|=\frac{1}{2}|\overline{AB}|\cos\sphericalangle BCA$.

Rješenje.



Prema Talesovom teoremu o obodnom kutu nad promjerom, $\sphericalangle END=90^\circ$ i $\sphericalangle EMD=90^\circ$.

Neka je $|AC|=b$, $|BC|=a$ i $\sphericalangle BCA=\gamma$.

Iz pravokutnog trokuta NCD slijedi da je $\cos\gamma=\frac{|CN|}{\frac{b}{2}}$, odnosno

$$
|CN|=\frac{b}{2}\cos\gamma. \tag{1}
$$

Iz pravokutnog trokuta CME slijedi da je $\cos\gamma=\frac{|CM|}{\frac{a}{2}}$, odnosno

$$
|CM|=\frac{a}{2}\cos\gamma. \tag{2}
$$

Iz (1) i (2) slijedi da je $\frac{|CM|}{|CN|}=\frac{a}{b}$.

Dakle, prema poučku SKS trokuti CMN i ABC su slični s koeficijentom sličnosti $\frac{\cos\gamma}{2}$.
Slijedi, $|MN| = \frac{1}{2}|AB|\cos\gamma$.

Zadatak B-2.4.

Duljine bridova kvadra su prirodni brojevi. Kad zbrojimo obujam, polovinu oplošja i duljine bridova dobijemo 1770. Odredite duljine bridova kvadra.

Rješenje.

Neka su a, b, c duljine bridova kvadra. Bez smanjenja općenitosti neka je $a \leqslant b \leqslant c$. Tada iz uvjeta u zadatku slijedi:

$$abc + ab + ac + bc + a + b + c = 1770.$$

Dodamo li broj 1 na obje strane jednakosti možemo grupirati članove danog izraza i lijevu stranu zapisati u obliku umnoška.

$$\begin{aligned}
&(abc + ab) + (ac + a) + (bc + b) + c + 1 = 1771\\
&ab(c + 1) + a(c + 1) + b(c + 1) + c + 1 = 1771\\
&(c + 1)(ab + a + b + 1) = 1771\\
&(c + 1)(a(b + 1) + b + 1) = 1771\\
&(a + 1)(b + 1)(c + 1) = 7 \cdot 11 \cdot 23.
\end{aligned}$$

Izraz na lijevoj strani je umnožak prirodnih brojeva, a na desnoj strani je rastav broja 1771 na proste faktore. Stoga je jedina mogućnost

$$a + 1 = 7,\ b + 1 = 11,\ c + 1 = 23,$$

odnosno

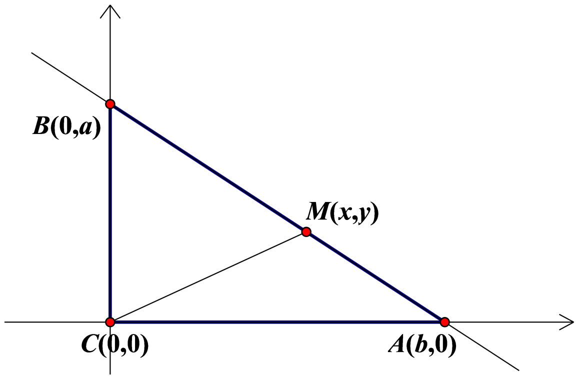
$$a = 6,\ b = 10,\ c = 22.$$

Zadatak B-2.5.

Zadan je trokut ABC s pravim kutom pri vrhu C. Na hipotenuzi odredite točku M tako da je

$$|MA|^2 + |MB|^2 - |MC|^2 = \frac{1}{4}|AB|^2.$$

Rješenje.



Smjestimo trokut ABC u koordinatni sustav kao na slici.

Jednadžba pravca AB je: $y = -\frac{a}{b}x + a$, pa točka M ima koordinate $M(x, -\frac{a}{b}x + a)$.

Računamo udaljenosti:

$$\begin{aligned}
d^2(A,M) &= (b-x)^2 + \left(-\frac{a}{b}x + a\right)^2 = b^2 - 2bx + x^2 + \left(\frac{ax}{b}\right)^2 - 2\frac{a^2x}{b} + a^2 \\
d^2(B,M) &= x^2 + \left(-\frac{a}{b}x + a - a\right)^2 = x^2 + \left(\frac{ax}{b}\right)^2 \\
d^2(C,M) &= x^2 + \left(-\frac{a}{b}x + a\right)^2 = x^2 + \left(\frac{ax}{b}\right)^2 - 2\frac{a^2x}{b} + a^2.
\end{aligned}$$

Slijedi

$$\begin{aligned}
&d^2(A,M) + d^2(B,M) - d^2(C,M) = \\
&= b^2 - 2bx + x^2 + \left(\frac{ax}{b}\right)^2 - 2\frac{a^2x}{b} + a^2 + x^2 + \left(\frac{ax}{b}\right)^2 - x^2 - \left(\frac{ax}{b}\right)^2 + 2\frac{a^2x}{b} - a^2 = \\
&= b^2 - 2bx + x^2 + \left(\frac{ax}{b}\right)^2
\end{aligned}$$

Prema uvjetu zadatka je

$$\begin{aligned}
b^2 - 2bx + x^2 + \left(\frac{ax}{b}\right)^2 &= \frac{1}{4}(a^2 + b^2) \\
\Leftrightarrow \; x^2\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) - 2bx + \frac{3}{4}b^2 - \frac{1}{4}a^2 &= 0.
\end{aligned}$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su:

$$x_{1,2} = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2 - 4\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)\left(\frac{3}{4}b^2 - \frac{1}{4}a^2\right)}}{2\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)}.$$

Pojednostavnimo izraz ispod korijena:

$$\begin{aligned}
4b^2 - 4\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right)\left(\frac{3}{4}b^2 - \frac{1}{4}a^2\right) &= 4b^2 - 4\left(\frac{3}{4}b^2 - \frac{1}{4}a^2 + \frac{3a^2}{4} - \frac{a^4}{4b^2}\right) \\
&= b^2 - 2a^2 + \frac{a^4}{b^2} = \left(b - \frac{a^2}{b}\right)^2
\end{aligned}$$

Slijedi da su rješenja oblika $x_{1,2} = \frac{2b \pm \left(b - \frac{a^2}{b}\right)}{2\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)}$. Prvo rješenje je

$$x_1 = \frac{\frac{b^2+a^2}{b}}{2\frac{b^2+a^2}{b^2}} = \frac{b}{2}.$$

Zaključujemo da se točka M nalazi se u polovištu hipotenuze.

Drugo rješenje je

$$x_2 = \frac{\frac{3b^2-a^2}{b}}{2\frac{b^2+a^2}{b^2}} = \frac{b(3b^2-a^2)}{2(b^2+a^2)}$$

i ono mora zadovoljavati uvjet $0 \leqslant x_2 \leqslant b$, odnosno $0 \leqslant \frac{b(3b^2-a^2)}{2(b^2+a^2)} \leqslant b$. Slijedi:

1. $0 \leqslant \frac{b(3b^2-a^2)}{2(b^2+a^2)} \;\Rightarrow\; 3b^2 - a^2 \geqslant 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} \leqslant \sqrt{3} \;\Rightarrow\; \alpha \leqslant 60^\circ$.
2. $\frac{b(3b^2-a^2)}{2(b^2+a^2)} \leqslant b \;\Rightarrow\; 3b^2 - a^2 \leqslant 2(b^2+a^2) \;\Rightarrow\; \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3} \;\Rightarrow\; \alpha \geqslant 30^\circ$.

Dakle, dva rješenja postoje samo ako je $30^\circ \leqslant \alpha \leqslant 60^\circ$, i tada točka M ima koordinate

$$M\left(\frac{b(3b^2-a^2)}{2(b^2+a^2)}, \frac{a(3a^2-b^2)}{2(b^2+a^2)}\right).$$

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – B varijanta

Primošten, 4. travnja 2017.

Zadatak B-3.1.

Riješite nejednadžbu

$$2 \log_{\frac{1}{5}} \left(49^{\sqrt{x^2-2}} - 1\right) + \log_5 \left(7^{\sqrt{4x^2-8}} + \frac{1}{5}\right) \leqslant -1.$$

Rješenje.

Zapišimo nejednadžbu u obliku:

$$-2 \log_5 \left(7^{2\sqrt{x^2-2}} - 1\right) + \log_5 \left(7^{2\sqrt{x^2-2}} + \frac{1}{5}\right) \leqslant -1.$$

Uvedimo supstituciju $t = 7^{2\sqrt{x^2-2}}, t > 0$.

Uvjeti na rješenje zadatka su $t - 1 > 0$ i $t + \frac{1}{5} > 0 \Longrightarrow t > 1 \quad (*)$.

Tada rješavamo nejednadžbu

$$\begin{aligned}
&-2 \log_5 (t-1) + \log_5 \left(t + \frac{1}{5}\right) \leqslant -1 \Leftrightarrow \log_5 \left(t + \frac{1}{5}\right) + \log_5 5 \leqslant \log_5 (t-1)^2 \\
&\log_5 5 \left(t + \frac{1}{5}\right) \leqslant \log_5 (t-1)^2 \Leftrightarrow \\
&5t + 1 \leqslant t^2 - 2t + 1 \\
&t^2 - 7t \geqslant 0
\end{aligned}$$

Rješenje ove kvadratne nejednadžbe je unija intervala $\langle -\infty, 0] \cup [7, +\infty\rangle$,
što zajedno s uvjetom $(*)$ daje $t \in [7, +\infty\rangle$.

Vraćanjem na nepoznanicu x dobivamo nejednadžbu:
$7^{2\sqrt{x^2-2}} \geqslant 7$, uz uvjet $|x| \geqslant \sqrt{2} \quad (**)$.
$2\sqrt{x^2-2} \geqslant 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2} \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2 \geqslant \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 \geqslant \frac{9}{4} \Leftrightarrow |x| \geqslant \frac{3}{2}$, što zadovoljava i uvjet $(**)$, pa je $x \in \left\langle -\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right\rangle$.

Zadatak B-3.2.

Niko kaže Juri: „Imam tri broja kojima je zbroj 2. Zbroj njihovih kvadrata je 6, a zbroj njihovih kubova 8. Što misliš, ako nastavim redom zbrajati n-te potencije tih brojeva, mogu li za neki n dobiti zbroj 2^{2017}?" Što će Jure odgovoriti? Obrazložite.

Rješenje.

Ako početne brojeve označimo s x, y, z, uvedimo supstituciju $a = x + y, b = xy$.

Vrijedi: $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$
$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$.

Polazni sustav postaje:

$$
\begin{aligned}
&a + z = 2 \\
&a^2 - 2b + z^2 = 6 \\
&a^3 - 3ab + z^3 = 8.
\end{aligned}
$$

Iz prve jednadžbe je $z = 2 - a$ i uvrštavanjem u druge dvije imamo sustav:

$$
\begin{aligned}
&a^2 - 2b + 4 - 4a + a^2 = 6 \\
&a^3 - 3ab + 8 - 12a + 6a^2 - a^3 = 8.
\end{aligned}
$$

Sređivanjem dobivamo:

$$
\begin{aligned}
&a^2 - 2a - b = 1 \\
&3a(2a - 4 - b) = 0
\end{aligned}
$$

Druga jednadžba daje nam dva slučaja:

1. *slučaj:*

$a = 0 \Longrightarrow z = 2, b = -1$

Sad imamo sustav: $x + y = 0, xy = -1$.

Njegova su rješenja $x_{1,2} = \pm 1, y_{1,2} = \mp 1$, a uređene trojke su $(1, -1, 2), (-1, 1, 2)$.

2. *slučaj:*

$2a - 4 - b = 0 \Longrightarrow b = 2a - 4$

Uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobivamo $a^2 - 4a + 3 = 0$.

Rješenja te jednadžbe su: $a_1 = 1 \Longrightarrow z = 1, b = -2$
$a_2 = 3 \Longrightarrow z = -1, b = 2$

Rješavamo sustav $x + y = 1, xy = -2$ i sustav $x + y = 3, xy = 2$.

Rješenja prvog su $x_1 = -1, y_1 = 2$ i $x_2 = 2, y_2 = -1$, a tada su trojke (x, y, z): $(-1, 2, 1), (2, -1, 1)$.

Rješenja drugog sustava su $x_1 = 2, y_1 = 1$ i $x_2 = 1, y_2 = 2$, a trojke su $(2, 1, -1), (1, 2, -1)$.

Konačno rješenje sustava su uređene trojke:

$$
(x, y, z) \in \{(1, -1, 2), (-1, 1, 2), (-1, 2, 1), (2, -1, 1), (1, 2, -1), (2, 1, -1)\}
$$

Zbroj n-tih potencija od x, y i z za svaku uređenu trojku (x, y, z) je $1^n + (-1)^n + 2^n$, a to je za neparne n uvijek jednako 2^n, a za parne $2 + 2^n$.

Stoga će Jure odgovoriti potvrdno, za $n = 2017$, odnosno $x^{2017} + y^{2017} + z^{2017} = 2^{2017}$.

Zadatak B-3.3.

Ako vrijedi $x\sin^2\alpha + y\cos^2\alpha = 1, x\cos^2\varphi + y\sin^2\varphi = 1, x \cdot \operatorname{tg}\alpha = y \cdot \operatorname{tg}\varphi, x \neq y$, izračunajte vrijednost izraza $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.

Rješenje.

Iz prve dvije jednakosti dobijemo:

$$\begin{aligned} x\sin^2\alpha + y\cos^2\alpha &= \sin^2\alpha + \cos^2\alpha \\ x\cos^2\varphi + y\sin^2\varphi &= \cos^2\varphi + \sin^2\varphi \end{aligned}$$

odnosno:

$$\begin{aligned} (x-1)\sin^2\alpha &= (1-y)\cos^2\alpha \\ (x-1)\cos^2\varphi &= (1-y)\sin^2\varphi \end{aligned}$$

Uočimo, iz $x = 1$ nužno slijedi $y = 1$ (i obratno), pa zbog $x \neq y$ vrijedi $x \neq 1$, $y \neq 1$. Prema tome, gornje jednadžbe možemo podijeliti sa $x-1$, odnosno $y-1$ pa imamo:
$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1-y}{x-1}$ i $\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{x-1}{1-y}$.

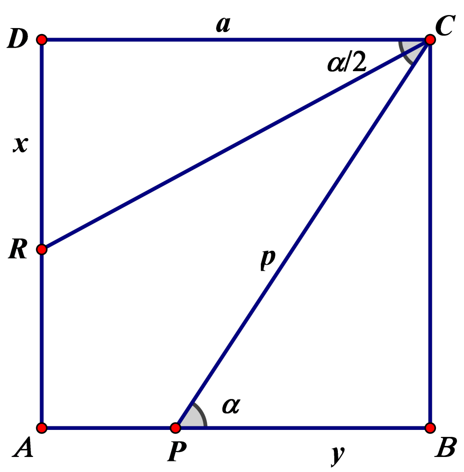
Iz treće jednakosti dobijemo:$x^2\operatorname{tg}^2\alpha = y^2\operatorname{tg}^2\varphi$, pa vrijedi $\dfrac{x^2(1-y)}{x-1} = \dfrac{y^2(x-1)}{1-y}$, odnosno $x^2(1-y)^2 = y^2(x-1)^2$, tj. $x(1-y) = \pm y(x-1)$.

Jednakost $x(1-y) = -y(x-1)$ ne vodi do rješenja zbog uvjeta $x \neq y$, pa je jedina mogućnost $x(1-y) = y(x-1) \Leftrightarrow x + y = 2xy \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$.

Zadatak B-3.4.

Neka je P bilo koja točka na stranici $\overline{AB}$ kvadrata $ABCD$, a točka R presjek stranice $\overline{AD}$ i simetrale kuta $\sphericalangle DCP$. Dokažite da je $|DR| + |PB| = |CP|$.

Prvo rješenje.



Uvedimo oznake: a - duljina stranice kvadrata, $x = |DR|, y = |PB|, p = |CP|, \alpha = \sphericalangle DCP$.

U pravokutnom trokutu CDR vrijedi: $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{x}{a}\Rightarrow x=a\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

Nadalje je $\sphericalangle CPB=\sphericalangle DCP=\alpha$ (kutovi uz transverzalu),
pa u pravokutnom trokutu PBC vrijedi:
$\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{a}{y}\Longrightarrow y=\dfrac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$
$\sin\alpha=\dfrac{a}{p}\Longrightarrow p=\dfrac{a}{\sin\alpha}$

Koristeći univerzalnu supstituciju $t=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\Longrightarrow\operatorname{tg}\alpha=\frac{2t}{1-t^2},\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2}$, imamo:

$$\begin{aligned}|DR|+|PB|=x+y&=at+\frac{a}{\frac{2t}{1-t^2}}\\&=a\left(t+\frac{1-t^2}{2t}\right)=a\cdot\frac{2t^2+1-t^2}{2t}\\&=a\cdot\frac{1+t^2}{2t}\\&=\frac{a}{\sin\alpha}\\&=p=|CP|.\end{aligned}$$

Drugo rješenje.

Računamo kao i u prvom rješenju, ali bez univerzalne supstitucije i uz iste oznake:

$$\begin{aligned}|DR|+|PB|=x+y&=a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}=\\&=a\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}+a\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\\&=a\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=a\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=a\frac{1}{\sin\alpha}=p=|CP|,\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

Zadatak B-3.5.

Barba Ivo, matematičar u mirovini, svaku je igru s unukom pretvarao u matematički zadatak. Tako je na pitanje kako izraditi papirnatog zmaja, dao vrlo neobičan odgovor. Zmaj ima oblik deltoida kojemu su dijagonale određene vektorima
$\overrightarrow{AC}=(5a+4)\vec{i}-5a\vec{j}$ i $\overrightarrow{BD}=4a\vec{i}+(2a+4)\vec{j},a\in\mathbb{R},a\neq0$. Ako bi dva vrha deltoida bila u točkama $A(-1,2)$, $D(1,4)$, gdje bi se nalazili vrhovi B i C? Može li se zmaj izrezati iz papira kružnog oblika, tako da svi vrhovi zmaja budu na rubu papira? Obrazložite.

Rješenje.

Dijagonale deltoida su međusobno okomite, pa vrijedi:

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \Leftrightarrow \\
&(5a+4) \cdot 4a - 5a(2a+4) = 0 \Leftrightarrow \\
&10a^2 - 4a = 0 \\
&a \neq 0 \Rightarrow a = \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

Tada je $\overrightarrow{AC} = 6\vec{i} - 2\vec{j}, \overrightarrow{BD} = \frac{8}{5}\vec{i} + \frac{24}{5}\vec{j}$. Ako je $A(-1,2), D(1,4)$, slijedi
$x_C + 1 = 6, y_C - 2 = -2, \quad C(5,0)$
$1 - x_B = \frac{8}{5}, 4 - y_B = \frac{24}{5}, \quad B(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$.

Nadalje treba provjeriti je li dani deltoid tetivni četverokut, odnosno može li se deltoidu opisati kružnica.
$\overrightarrow{BA} = -\frac{2}{5}\vec{i} + \frac{14}{5}\vec{j}$
$\overrightarrow{BC} = \frac{28}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}$
$\overrightarrow{DA} = -2\vec{i} - 2\vec{j}$
$\overrightarrow{DC} = 4\vec{i} - 4\vec{j}$
$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = -8 + 8 = 0$ i $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{56}{25} + \frac{56}{25} = 0$
$\Rightarrow \sphericalangle ADC = 90^\circ = \sphericalangle ABC \Rightarrow$
$\sphericalangle ADC + \sphericalangle ABC = 180^\circ \Longrightarrow$

Četverokut $ABCD$ je tetivni četverokut, odnosno njemu se može opisati kružnica i u tom je slučaju najmanji otpad.

Napomena: Dokaz se može provesti i tako da se prvo odredi jednadžba opisane kružnice npr. kroz točke A, C, D, a zatim provjeri pripada li joj i točka B.

$S(2,1), r^2 = \dfrac{36+4}{4} = 10$

Jednadžba kružnice je $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 10$.

DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – B varijanta

Primošten, 4. travnja 2017.

Zadatak B-4.1.

U skupu prirodnih brojeva riješite jednadžbu $5^x + 5^y + 5^z = 18775$, gdje je $x < y < z$. Koliko ima trokuta kojima su duljine stranica brojevi, ne nužno različiti, iz skupa $\{x, y, z\}$?

Rješenje.

Zapišimo danu jednadžbu u sljedećem obliku:

$5^x(1 + 5^{y-x} + 5^{z-x}) = 5^2 \cdot 751$.

Kako su $x < y < z$ prirodni brojevi, jedina je mogućnost:

$5^x = 5^2$ i $1 + 5^{y-x} + 5^{z-x} = 751$.

Tada je $x = 2$, $5^{y-2} + 5^{z-2} = 750$.

Analogno, iz $5^{y-2}(1 + 5^{z-y}) = 5^3 \cdot 6$ slijedi $5^{y-2} = 5^3$ i $1 + 5^{z-y} = 6$, odnosno $y - 2 = 3$ tj. $y = 5$.

Iz $1 + 5^{z-5} = 6$ slijedi $5^{z-5} = 5 = 5^1$ pa vrijedi $z - 5 = 1$, $z = 6$.

Dakle, rješenje dane jednadžbe u skupu prirodnih brojeva je $x = 2$, $y = 5$, $z = 6$.

Ovi brojevi određuju jedan raznostraničan trokut, tri jednakostranična trokuta i nekoliko jednakokračnih trokuta. Jednakokračni trokuti bi mogli biti oni sa stranicama $2\,2\,5$, $2\,2\,6$, $5\,5\,2$, $5\,5\,6$, $6\,6\,2$, $6\,6\,5$, ali mogući su samo oni koji zadovoljavaju nejednakost trokuta, a to su $5\,5\,2$, $5\,5\,6$, $6\,6\,2$, $6\,6\,5$.

Dakle, ukupno je osam traženih trokuta.

Zadatak B-4.2.

Na planetu „Sve je moguće" djeca igraju igru u kojoj svatko od njih treba u određenom vremenu izabrati brojeve iz skupa neparnih prirodnih brojeva manjih od 1000. Pri tome zbroj niti jednog para različitih brojeva koje je neko dijete izabralo nije 1002. Pobjednik je onaj tko izabere najviše takvih brojeva. Koliko najviše brojeva može izabrati pobjednik? Na kraju igre ustanovili su da je nekoliko djece izabralo maksimalan broj takvih brojeva, a pri tome nikoje dvoje djece nije izabralo sve iste brojeve. Odredite maksimalan broj djece za koji se to moglo dogoditi.

Rješenje.

Postoji 500 neparnih brojeva manjih od 1000. Grupiramo ih u parove čiji je zbroj 1002:

$$(3, 999), (5, 997), \ldots, (497, 505), (499, 503) \qquad (*)$$

Takvih je parova 249. Oba broja koja su u paru ne mogu biti među izabranima. Brojevi 1 i 501 nemaju para, pa mogu biti izabrani.

Zaključujemo da neko dijete, odnosno pobjednik, može izabrati najviše 251 broj tj. po jedan broj iz svakog od parova (*) te brojeve 1 i 501.

Odredimo maksimalan broj djece koja su mogla izabrati 251 broj, a da je barem jedan odabrani broj različit kod svakog od njih.

Brojeve 1 i 501 morali su svi odabrati. Iz svakog od parova (*) jedan broj možemo odabrati na dva načina. Kako parova ima 249, broj mogućih odabira je 2^{249}. Prema tome maksimalan broj djece koja su mogla odabrati 251 broj s danim svojstvom iznosi 2^{249}.

Zadatak B-4.3.

Ako za funkciju f vrijedi $f(x)+3f(x+1)-f(x)f(x+1)=5$, $f(1)=2017$, izračunajte koliko je $f(2017)$.

Rješenje.

Iz $f(x)+3f(x+1)-f(x)f(x+1)=5$ izrazimo $f(x+1)=\dfrac{f(x)-5}{f(x)-3}$.

Tada je

$$f(x+2)=\frac{f(x+1)-5}{f(x+1)-3}=\frac{\frac{f(x)-5}{f(x)-3}-5}{\frac{f(x)-5}{f(x)-3}-3}=\frac{-4f(x)+10}{-2f(x)+4}=\frac{2f(x)-5}{f(x)-2}$$

$$f(x+4)=f((x+2)+2)=\frac{2f(x+2)-5}{f(x+2)-2}=\frac{2\frac{2f(x)-5}{f(x)-2}-5}{\frac{2f(x)-5}{f(x)-2}-2}=\frac{-f(x)}{-1}=f(x)$$

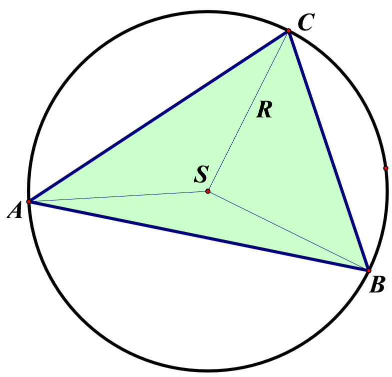
Zaključujemo da je funkcija f periodična s periodom $P=4$, pa vrijedi

$$f(2017)=f(1+4\cdot 504)=f(1)=2017.$$

Zadatak B-4.4.

Površina trokuta ABC je $P=3+\sqrt{3}$. Izračunajte površinu kruga opisanog trokutu ABC, ako su duljine lukova $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$ i $\widehat{CA}$ redom u omjeru $5:3:4$.

Prvo rješenje.



Duljine lukova su u omjeru $l_1:l_2:l_3=5:3:4$ tj. $l_1=5k$, $l_2=3k$, $l_3=4k$. Iz $l_1+l_2+l_3=2\pi$ slijedi

$$k=\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{6}\Rightarrow l_1=\frac{5\pi}{6}, l_2=\frac{\pi}{2}, l_3=\frac{2\pi}{3}.$$

Odnosno, $\sphericalangle ASB = 150°$, $\sphericalangle BSC = 90°$, $\sphericalangle ASC = 120°$.

Prema Talesovom poučku obodni kut je dvostruko manji od središnjeg kuta nad istom tetivom. Tada je

$\gamma = \frac{1}{2} \cdot 150° = 75°$, $\beta = \frac{1}{2} \cdot 90° = 45°$, $\alpha = \frac{1}{2} \cdot 120° = 60°$.

Duljine stranica računamo koristeći poučak o sinusima:

$$a = 2R \sin 45° = R\sqrt{2}$$
$$b = 2R \sin 60° = R\sqrt{3}.$$

$\sin 75° = \sin(45° + 30°) = \sin 45° \cos 30° + \cos 45° \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{3})$.

Površina trokuta je $P = \dfrac{1}{2}ab \sin 75° = \dfrac{1}{2}R\sqrt{2}R\sqrt{3}\dfrac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{3}) = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}(1 + \sqrt{3})$.

Ako je $P = 3 + \sqrt{3}$, onda iz $\frac{R^2\sqrt{3}}{4}(1 + \sqrt{3}) = 3 + \sqrt{3}$ slijedi $R^2 = 4$.

Površina kruga je $P = 4\pi$.

Drugo rješenje.

Smjestimo trokut u koordinatni sustav tako da su koordinate vrhova trokuta $A\left(-\frac{R\sqrt{3}}{2}, -\frac{R}{2}\right)$, $B(R, 0)$ i $C(0, R)$. Koristeći analitičku formulu za površinu trokuta

$$P = \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|$$

izračunat ćemo traženi polumjer kruga, a zatim i njegovu površinu.

Zadatak B-4.5.

Osam jednakih kockica imaju na dvije suprotne strane po jednu točkicu, na druge dvije suprotne strane po dvije, a na preostale dvije strane po tri točkice. Od njih je složena jedna velika kocka. Ako se prebroje točkice na svakoj strani velike kocke, može li se od tih brojeva dobiti šest različitih članova aritmetičkog niza?

Rješenje.

Od svake kockice vidljive su tri strane koje se sastaju u jednom vrhu velike kocke, a na njima su jedna, dvije ili tri točkice. Tada je ukupan broj točkica koje se vide na velikoj kocki $8 \cdot (1 + 2 + 3) = 48$.

Označimo broj točkica na stranama kocke s $a_1, a_2, \ldots a_6$ u rastućem poretku. Ako su to različiti članovi aritmetičkog niza onda je razlika $d > 0$, $d \in \mathbb{N}$.

Zbroj aritmetičkog niza od 6 članova je $\frac{6}{2}(2a_1 + 5d)$, a tada je

$\dfrac{6}{2}(2a_1 + 5d) = 48$, odnosno $2a_1 + 5d = 16$.

Iz toga slijedi $5d = 2(8 - a_1)$ pa d mora biti paran broj, a $4 \leqslant a_1 \leqslant 8$.

Direktnim provjeravanjem slijedi $a_1 = 8$, $d = 0$. Dakle, brojevi točkica na svih šest strana kocke ne mogu biti različiti članovi aritmetičkog niza.

Napomena: Do istog zaključka dolazimo i ako gledamo zbroj aritmetičkog niza kao $\frac{6}{2}(a_1 + a_6) = 48 \Leftrightarrow a_1 + a_6 = 16$. Tada ispisivanjem i provjerom svih mogućnosti ($4 + 12$, $5 + 11$, $6 + 10$, $7 + 9$, $8 + 8$), iz $a_6 = a_1 + 5d$, dobivamo da razlika d nije prirodan broj.