Pripremni zabaci - RMM 2017

1 A

1. Niz (a_n) prirodnih brojeva je takav da a_{m+n} dijeli $a_m + a_n$ za sve $m, n \in \mathbb{N}$. Ako vrijedi $a_n \leq 2017$ za sve prirodne n, dokaži da niz nakon nekog vremena postane periodičan.

2. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je $f(1) = 1$. Ako za sve realne a, b vrijedi
$$f(a) + f(b) = f(a + b)$$
i za sve pozitivne realne x vrijedi
$$f(x)f(\frac{1}{x}) = 1,$$
dokaži $f(x) = x$ za sve realne x.

3. Beskonačan niz (x_n) definiran je prvim članom $x_n > 1$, koji je racionalan broj, i relacijom $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{\lfloor x_n \rfloor}$ za sve prirodne n. Dokaži da niz sadrži prirodan broj.

4. Neka je $a \geq 3$ realan, i P polinom stupnja n s realnim koeficijentima. Dokaži da je barem jedan od sljedećih brojeva veći ili jednak 1:
$$|a^0 - P(0)|,\ |a^1 - P(1)|,\ |a^2 - P(2)|, \cdots, |a^{n+1} - P(n+1)|.$$

5. Zadan je pozitivan realan broj N. Dokaži da postoji konstanta c sa sljedećim svojstvom:

   Neka je $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ strogo konveksna funkcija takva da vrijedi
$$|f(x) - f(y)| \leq N|x - y|$$
za sve x, y u domeni. Tada je broj cjelobrojnih točaka na $y = f(x)$ manji od $ca^{\frac{2}{3}}$.

   (Funkcija je strogo konveksna ako za svaku dužinu koja spaja dvije točke $(u, f(u))$ i $(v, f(v))$ grafa funkcije, sve točke grafa funkcije s x-koordinatama u intervalu $u < x < v$ leže strogo ispod te dužine.)

6. Neka su $a_1, \ldots, a_k$ realni brojevi i $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = 0$. Dokaži
$$\max_{1 \leq i \leq k} a_i^2 \leq \frac{k}{3}\left((a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + \cdots + (a_{k-1} - a_k)^2\right).$$

2 C

1. Neka je $n \geq 2$ prirodan broj. Pješak stoji na jednom od polja $n \times n$ kvadratne ploče. Pješak se iz polja u stupcu k za svaki $1 \leq k \leq n$ može pomaknuti u bilo koje polje u retku k. (To su jedini dozvoljeni potezi.) Dokaži da postoji niz od n^2 poteza u kojima pješak prolazi kroz sva polja ploče i vraća se u početno polje.

2. Neka je n prirodan broj. Na stolu je beskonačno mnogo karata. Na svakoj karti je napisan nenegativan cijeli broj tako da za svaki cijeli $l \geq 0$ postoji točno n karata s brojem l. *Potez* se sastoji od izbacivanja 2017 karata sa stola. Pronađi najmanji n takav da postoji beskonačan niz poteza u kojem u k-tom potezu izbacujemo 2017 karata s brojevima sume točno k za svaki prirodan k.

3. Zadano je 100 različitih prirodnih brojeva. Nazivamo par prirodnih brojeva *dobrim* ako je omjer tih brojeva ili 2 ili 3. Koji je najveći mogući broj dobrih parova koje možemo sastaviti od tih 100 brojeva? (Jedan broj može biti u više parova.)

4. Dokaži da postoji pozitivan realan broj c sa sljedećim svojstvom: Za svaki prirodan broj n, iz skupa točaka (x, y) u Kartezijanskom koordinatnom sustavu s cjelobrojnim koordinatama $0 \leq x, y \leq n-1$, možemo odabrati barem $cn^{\frac{5}{3}}$ točaka tako da nijedne četiri točke ne čine kvadrat stranica paralelnih koordinatnim osima.

5. Neka je T stablo s k bridova. Dokaži da se k-dimenzionalna kocka (s 2^k vrhova) može particionirati u grafove izomorfne T. *(Grafovi su izomorfni ako postoji bijekcija među njima koja preslikava vrhove u vrhove i bridove u bridove tako da slike bridova povezuju slike istih vrhova. Particija grafa ima svojstvo da je svaki brid pokriven točno jednom, a vrhovi mogu biti pokriveni i više puta.)*

3 G

1. Neka je G težište pravokutnog trokuta ABC s pravim kutem u vrhu C. Točka P leži na polupravcu AG tako da je $\angle CPA = \angle CAB$, a točka Q leži na polupravcu BG tako da je $\angle CQB = \angle ABC$. Dokaži da se opisane kružnice trokuta AQG i BPG sijeku na stranici AB.

2. Zadan je šiljastokutan trokut ABC sa središtem upisane kružnice I. Na opisanoj kružnici trokuta ABC, D je polovište luka $\widehat{BC}$ na kojem je A. Pravac DI siječe pravac BC u E i opisanu kružnicu trokuta ABC drugi put u F. Neka je P na pravcu AF takva da su pravci PE i AI paralelni. Dokaži da je PE simetrala kuta $\angle BPC$.

3. Kružnice k_1 i k_2 sijeku se u P i K. Točke X na k_1 i Y na k_2 izabrane su tako da je XY zajednička tangenta k_1 i k_2 bliža P. Pravac XP siječe k_2 drugi put u C, a pravac YP siječe k_1 drugi put u B. Pravci BX i CY sijeku se u A. Ako je Q drugo sjecište opisanih kružnica trokutima ABC i AXY, dokaži
$$\angle QXA = \angle QKP.$$

4. Zadan je trokut ABC i točka D na stranici AB. Neka je I točka na simetrali kuta $\angle ACB$. Pravci AI i CI ponovno sijeku opisanu kružnicu trokuta ACD u P i Q. Pravci BI i CI ponovno sijeku opisanu kružnicu trokuta BCD u R i S. Ako je $P \neq Q$ i $R \neq S$, dokaži da se pravci AB, PQ i RS sijeku u jednoj točki ili su paralelni.

5. Zadan je raznostraničan trokut ABC kojemu je točka O središte opisane kružnice. Točka A' je na produžetku usmjerene dužine AO tako da vrijedi $\angle BA'A = \angle CA'A$. Neka su A_1 i A_2 nožišta visina iz A' na AB i AC. Neka je H nožište visine iz A na BC. Neka je R_A radijus opisane kružnice trokuta HA_1A_2, i neka su R_B i R_C definirani analogno. Dokaži
$$\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C} = \frac{2}{R},$$
gdje je R radijus opisane kružnice trokuta ABC.

6. Dijagonale tetivnog četverokuta $ABCD$ sijeku se u K. Polovišta dijagonala AC i BD nazovimo M i N. Opisane kružnice trokuta ADM i BCM sijeku se u M i L. Dokaži da točke K, L, M i N leže na jednoj kružnici.

4 N

1. 2010 ljudi sjedi oko kružnog stola. Jedna osoba dobije bombon, zatim osoba jedno mjesto lijevo dobije bombon, zatim osoba 2 mjesta lijevo od druge osobe koja je dobila bombon dobije bombon, i redom n-ta osoba lijevo od osobe koja dobije n-ti bombon dobija $n+1$-i bombon. Koliko osoba dobije ijedan bombon?

2. Pronađi sve $n \geq 2$ takve da su $i+j$ i $\binom{n}{i}+\binom{n}{j}$ iste parnosti za sve $0 \leq i, j \leq n$.

3. Pronađi sve funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da vrijede sljedeći uvjeti:

   i) Za svaki $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(n) = n$. (Ovdje je je $f^{(1)} = f$ i $f^{(k)} = f^{(k-1)} \circ f$.)

   ii) Za svaki $m, n \in \mathbb{N}$, $|f(mn) - f(m)f(n)| < 2017$.

4. Neka je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ funkcija za koju je $af(a) + bf(b) + 2ab$ potpun kvadrat za sve $a, b \in \mathbb{N}$. Dokaži da je $f(a) = a$ za sve $a \in \mathbb{N}$.

5. Neka je S skup svih četvorki cijelih brojeva (a, b, c, d) za koje je $ad - bc = 1$. Neka je T skup svih četvorki cijelih brojeva (a, b, c, d) između 0 i $N-1$ za koje je $ad - bc \equiv 1 \pmod{N}$. Pokaži da je preslikavanje $f : S \to T$, $f(a, b, c, d) = (a \pmod{N}, b \pmod{N}, c \pmod{N}, d \pmod{N})$ surjekcija.

6. Neka je S skup svih pravih potencija (kvadrata, kubova, ...), osim 1. Odredi

$$\sum_{n \in S} \frac{1}{n-1}.$$