TEORIJA BROJEVA - Zadaci sa znamenkama

Osnove činjenice iz teorije brojeva koje ćemo koristiti pri rješevanju zadataka

Dekadski zapis prirodnog broja *n:*

$n=\overline{a_k a_{k-1} a_{k-2} ... a_3 a_2 a_1 a_0} = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \cdots + a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$,

gdje je $a_k \neq 0,\ a_k, a_{k-1}, ..., a_1, a_0 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

N – skup svih prirodnih brojeva, $N=\{1,2,3,...,n,n+1,...\}$

N_0 - skup svih prirodnih brojeva i nula, $N_0=\{0,1,2,3,...,n,n+1,...\}$

Z - skup svih cijelih brojeva, $Z=\{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...,n,n+1,...\}$

Q - skup svih racionalnih brojeva, $Q=\left\{\frac{m}{n}, m\in Z, n\in N\right\}$

Zbroj, razlika i umnožak dva cijela broja je također cijeli broj.

Cijeli broj *b* djeljiv je s cijelim brojem a $(a \neq 0)$ ako i samo ako postoji cijeli broj *k*, tako da je $b=k\cdot a.$ Još kažemo:

- *a* dijeli *b* i pišemo $a|b$
- broj *b* je višekratnik broja *a*
- broj *a* je djelitelj broja *b*.

Za proizvoljan cijeli broj *n*, njegovi su višekratnici $0, \pm n, \pm 2n, \pm 3n, ...$

Među n uzastopnih cijelih brojeva mora biti jedan višekratnik broja *n*

Neka su a,b,c proizvoljni cijeli brojevi. Tada vrijedi:

- Ako $a|b$ tada $a|(b\cdot c)$
- Ako $a|b$ i $b|c$ tada $a|c$
- Ako $a|b$ i $a|c$ tada $a|(ka+lb)$, za sve cijele brojeve *k,l*
- Ako $a|b$ i $b|a$ tada $a=b$ *ili* $a=-b$
- Ako $a|b$ i $a|b\pm c$ tada $a|c$

Najveći zajednički djelitelj brojeva *a* i *b* s oznakom D(*a*,*b*) je najveći pozitivan cijeli broj s kojim su djeljivi i broj *a* i broj *b*.

Najmanji zajednički višekratnik brojeva *a* i *b* s oznakom V(*a*,*b*) je najmanji pozitivan cijeli broj koji je djeljiv s brojem *a* i brojem *b*.

Ako je D(*a*,*b*) = 1, kažemo da su brojevi *a* i *b* relativno prosti.

Pozitivan cijeli broj veći od 1 je *prost broj* ako je djeljiv samo s 1 i sa samim sobom. U protivnom je to *složen broj*.

Jedini parni prost broj je 2.

Svaki se složeni broj može na jedinstveni način napisati u obliku umnoška prostih brojeva.

- $D(a\cdot b, a\cdot c)=a\cdot D(b,c)$
- Ako $a|b\cdot c$ i $D(a,b)=1$ tada $a|c$
- Ako $a|b$, $a|c$ i $D(a,b)=1$ tada $(ab)|c$

Kriteriji djeljivosti
Prirodni broj n je djeljiv s brojem 2 ako i samo ako je zadnja znamenka broja n 0,2,4,6 ili 8.
Prirodni broj n je djeljiv s brojem 3 ako i samo ako je zbroj znamenaka broja n djeljiv s 3.
Prirodni broj n je djeljiv s brojem 4 ako i samo ako je dvoznamenkasti završetak broja n djeljiv s 4.
Prirodni broj n je djeljiv s brojem 5 ako i samo ako je zadnja znamenka broja n 0 ili 5.
Prirodni broj n je djeljiv s brojem 8 ako i samo ako je troznamenkasti završetak broja n djeljiv s 8.
Prirodni broj n je djeljiv s brojem 9 ako i samo ako je zbroj znamenaka broja n djeljiv s 9.
Prirodni broj n je djeljiv s brojem 11 ako i samo ako je razlika zbroja znamenaka na parnim mjestima i zbroja znamenaka na neparnim mjestima u dekadskom zapisu broja n djeljiva s 11.

Prirodni broj $n = \overline{a_k a_{k-1} a_{k-2} \dots a_3 a_2 a_1 a_0}$ je djeljiv s brojem 7,11 ili 13 ako i samo ako je broj $\overline{a_k a_{k-1} a_{k-2} \dots a_3} - \overline{a_2 a_1 a_0}$ djeljiv s brojem 7, 11 ili 13.(Dokažite.)

Parni cijeli brojevi su oblika 2n, a neparni 2n+1
Svojstva

- Zbroj dva neparna cijela broja je paran
- Zbroj dva parna cijela broja je paran
- Zbroj jednog parnog i jednog neparnog cijelog broja je neparan
- Zbroj dva cijela broja je neparan ako i samo ako je njihova razlika neparan broj.
- Zbroj dva cijela broja je paran ako i samo ako je njihova razlika paran broj.
- Ako je zbroj dva cijela broja neparan broj tada je njihov umnožak paran.
- Ako je umnožak tri cijela broja neparan broj tada je njihov zbroj neparan.
- Umnožak dva cijela broja je paran broj ako i samo ako je barem jedan od njih paran

Kvadrat prirodnog broja n je broj $n^2 = n \cdot n$
n -ta potencija broja a je broj $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n}$
Kvadrati prirodnih brojeva završavaju znamenkama 0, 1,4,5,6 ili 9.
Zbroj prvih n prirodnih brojeva : $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Primjeri

1. Ako sve prirodne brojeve redom pišemo jedan pored drugog, koja će se znamenka naći na 2016-tom mjestu?

Rješenje:
Prebrajanjem dolazimo do znamenke 8. (2016 = 9 + 9 × 20 + 6 × 300 + 27 tj. zadnja znamenka broja708)

2. Koliko ima četveroznamenkastih brojeva koji su sastavljeni od međusobno različitih znamenaka iz skupa $\{0,1,2,3,4,5\}$ i djeljivi su sa 5?(općinsko 2014,1r)

Rješenje:
Ako je zadnja znamenka 0: prvu znamenku možemo odabrati na5 načina (od preostalih 5 znamenki), drugu na 4, treću na 3 načina ili ukupno $5\cdot4\cdot3=60$ načina.
Ako je zadnja znamenka 5: prvu znamenku možemo odabrati na4 načina (0 ne može biti na 1.mjestu), drugu na 4(sad može biti 0), treću na 3 načina ili ukupno $4\cdot4\cdot3=48$ načina.
Prema tome, ima 60 + 48 = 108 traženih četveroznamenkastih brojeva.

3. Odredite sve troznamenkaste brojeve koji su 5 puta veći od od umnoška svojih znamenaka. (HR, republičko1990,7r)

Rješenje:
$\overline{abc}=5abc\Rightarrow$
$100a+10b+c=5abc\Rightarrow 5|c\Rightarrow c=5$
$20a+2b+1=5ab\Rightarrow 5|(2b+1)\Rightarrow 2b+1=5,\text{ ili } 2b+1=15$
$b=2$ ili $b=7$
Iz $20a+2b+1=5ab$, za b = 2 a nije cijeli broj, a za b = 7 dobivamo a = 1. Rješenje je broj 175.

4. Odredite sve prirodne brojeve djeljive s 8 kojima je zbroj znamenaka manji od 10, a umnožak znamenaka je jednak 12.(državno 2010,7r)

Rješenje:
$12=2\cdot2\cdot3=4\cdot3=2\cdot6$.
Zaključujemo da znamenke traženih brojeva mogu biti kombinacija nekih od brojeva 1,2,3,4,6 . Jedini dvoznamenkasti brojevi koji imaju umnožak znamenaka 12 su 26,34,43,62, a oni nisu djeljivi s 8. Prema tome traženi broj mora biti najmanje troznamenkasti.
Njegov dvoznamenkasti završetak mora biti djeljiv s 4,(a umnožak znamenaka djelitelj od 12), odnosno neki od brojeva: 12, 16, 32.
Tada su troznamenkasti brojevi s traženim svojstvom: 216, 232.
Ako broj ima više od tri znamenke, njegov troznamenkasti završetak mora biti djeljiv s 8 i umnožak znamenaka djelitelj od 12, odnosno neki od brojeva: 112, 312, 216, 232. Pazeći da zbroj znamenaka bude manji od10, a umnožak 12, ovim ćemo brojevima dodavati s lijeve strane znamenke 1 ili 2 ili 3.
Primjerice, broju 112 moramo dodati znamenke 2 i 3 kako bi umnožak znamenaka bio 12. (ne možemo dodati 6 jer bi zbroj znamenaka bio 10).
Tada završetak 112 generira sljedeće brojeve s traženim svojstvima: 23112, 32112.
Završetak 312 generira brojeve: 2312,12312,21312.
Završetak 232 generira brojeve: 1232,11232.
Konačno, traženi su brojevi:216,232, 23112, 32112, 2312,12312,21312, 1232,11232.

5. Odredite sve troznamenkaste proste brojeve $\overline{xyz}$**,** za koje vrijedi $x \cdot y \cdot z = 252$**.** (MFL,1993. izvanredni broj E)

Rješenje

$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 252$**.** Broj mora imati znamenke 4,7,9 ili 6,6 i 7. Jedini prosti brojevi su 479 i 947.

6. Odredite najveći i najmanji sedmeroznamenkasti broj djeljiv s 11, čije su sve znamenke različite od 0.(MFL, 1993.,izvanredni broj E)

Rješenje.

Najveći sedmeroznamenkasti broj je 9999999, ali nije dj. sa 11.Najveći koji je djeljiv sa 11 je broj 9999990, ali završava s nulom. Traženi broj je 9999990 – 11 = 9999979.
Najmanji sedmeroznamenkasti broj kojemu su sve znamenke različite od 0 je 1111111. Kako je njegov ostatak pri dijeljenju s 11 jednak 1, ako mu dodamo 10 dobit ćemo traženi najmanji broj 1111121.

7. Odredite zbroj svih pozitivnih dvoznamenkastih cijelih brojeva koji su djeljivi svakom od svojih znamenki. (AIME 2001).

Rješenje

$\overline{xy} = 10x + y, x \neq 0; x, y \in \{0,1,2,...,9\}$

Kako $x|10x + y$ i $x|10x$ tada $x|y$, pa je $y = kx$. Analogno $10x = ly$.

Tada je $10 = k \cdot l \Rightarrow k = 1,2,5$ odnosno $y = x$ ili $y = 2x$ ili $y = 5x,\ x, y \leq 9$. Traženi dvoznamenkasti brojevi su 11,22,33,44,55,66,77,88,99, 12,24,36,48, 15, njihov je zbroj 630.

8. Odredite broj čiji se kvadrat sastoji od znamenaka 0,2,3 i 5. (I.L. Babinskaja, Zadaci s Ruskih mat.natj.)

Rješenje.

Kvadrat ne može završiti znamenkama 2 i 3 ili s jednom nulom. Stoga je na kraju broj 5. Radi se o kvadratu 3025, a traženi je broj 55.

9. Od svih troznamenkastih brojeva odredite onaj koji podijeljen zbrojem svojih znamenaka daje najveći rezultat. (Moskovska olimpijada 1954)

Rješenje.

Vrijedi $100x + 10y + z = (x + y + z) \cdot k, x > 0, y \geq 0, z \geq 0.$ Tada je

$x(100 - k) + y(10 - k) + z(1 - k) = 0.$

Kako je $x > 0, y \geq 0, z \geq 0$ slijedi $k \leq 100$, a kako tražimo najveći takav, k = 100. Tada je

$99y + 99z = 0.$ To je moguće jedino za $x = y = 0$.

10. Zbroj prvih nekoliko uzastopnih prirodnih brojeva jednak je troznamenkastom broju kojemu su sve znamenke jednake. Koliko je prirodnih brojeva zbrojeno?(Kijevska olimpijada, 1955)

Rješenje.

$1+2+3+...+k=\overline{aaa}\Rightarrow$

$\frac{k(k+1)}{2}=3\cdot a\cdot 37\Rightarrow k(k+1)=2\cdot 3\cdot a\cdot 37$

Jedina mogućnost da desna strana bude umnožak dva uzastopna prirodna broja je za a = 6 odnosno, zbrojeno je 36 prirodnih brojeva.

11. Neka je $\overline{abcd}$ proizvoljan četveroznamenkasti broj. Definiramo sljedeće transformacije:
Ako su neke dvije susjedne znamenke tog broja različite od nula, onda se obje mogu smanjiti za 1.(Primjerice broj 9870 se mijenja u 8770 ili 9760. Slično, ako su neke dvije znamenke danog broja različite od 9, onda se obje mogu povećati za 1.(Tako 9870 se mijenja u 9980 ili 9881) Može li se nizom transformacija broj 2621 transformirati u
a. 2016,
b. 2128 (Pripreme za natjecanje, Tuzla)

Rješenje.
Uočite da se nakon svake transformacije broj (a + c) – (b + d) ne mijenja. Za početni broj 2621 vrijedi (2+2) – (6+1) = -3.
a. Za 2016 je (2+1) – (0+6) = -3, pa se do njega može doći opisanim transformacijama:
2621,2632, 2643, 2654, 2665, 2676, 2566, 2456, 2346, 2236, 2126, 2016
b. Za 2128 je (2+2) – (1+8) = -5 ≠ -3, što znači da se do broja 2128 ne može doći opisanim transformacijama.

12. Pokažite da je broj $\underbrace{111...11}_{1997}\underbrace{22...22}_{1998}5$, koji ima 1997 jedinica i 1998 dvojki u svom zapisu, potpuni kvadrat.(1998., JBMO)

Rješenje:

$$\underbrace{111...11}_{1997}\underbrace{22...22}_{1998}5=\frac{10^{1997}-1}{9}\cdot 10^{1999}+\frac{10^{1998}-1}{9}\cdot 20+5$$

Neka je $a=10^{1997}$. Tada je

$$\underbrace{111...11}_{1997}\underbrace{22...22}_{1998}5=\frac{a-1}{9}\cdot 100a+\frac{10a-1}{9}\cdot 20+5=$$

$$\frac{1}{9}\left(100a^2+100a+25\right)=\frac{25}{9}\left(2a+1\right)^2$$

Zadaci za samostalan rad

1. Ako četveroznamenkasti broj napišemo obrnutim redoslijedom, novi četveroznamenkasti broj bit će 9 puta veći. Koji četveroznamenkasti broj ima to svojstvo?(1989.,7r)

2. Neka je A broj šesteroznamenkastih brojeva čiji je umnožak znamenki 105, a B broj šesteroznamenkastih brojeva čiji je umnožak znamenki 147. Odredi omjer A : B.(općinsko 2014, 2r)

3. U zapisu broja 12345678910111213141 5...99100 treba precrtati sto znamenki tako da one koje ostaju daju najveći mogući broj.(Moskovska olimpijada 1954)

4. Tamara je na ploču napisala paran prirodan broj. Nakon toga je, jednog za drugim, napisala još dvanaest brojeva tako da je svaki broj za 5 veći od kvadrata prethodno napisanog broja. Odredi kojom znamenkom može završiti posljednji napisani broj. (općinsko 2014, 2r)

5. Ako nekom broju obrišemo znamenku jedinica, dobit ćemo broj koji je za 2010 manji od polaznog broja. Koji je polazni broj?(općinsko 2010.,1r)

6. Dokaži da zbroj svih troznamenkastih brojeva čiji se dekadski zapis sastoji od tri različite znamenke, različite od nula ima barem tri različita prosta djelitelja.(općinsko 2013.,2r)

7. Od znamenki 0,1,2,...,9 (svaku upotrijebiti samo jednom) treba sastaviti pet dvoznamenkastih brojeva tako da umnožak tih pet brojeva bude najveći mogući. Obrazložite odgovor. (MFL,1993., E)

8. Odredite sve četveroznamenkaste brojeve $\overline{abcd}$ za koje vrijedi $\overline{abcd} = 11(a+b+c+d)^2$. (JBMO, 2006)

9. Odredite najmanji prirodan broj *n*, takav da je svaka znamenka broja 15*n* jednaka 8 ili 0. (Srpske pripreme za JBMO)

10. Odredite broj svih peteroznamenkastih prirodnih brojeva $\overline{abcde}$ (znamenke nisu nužno različite) kojima je zbroj troznamenkastog broja $\overline{abc}$ na početku i dvoznamenkastog $\overline{de}$, na kraju, djeljiv s11.

11. Odredite sve dvoznamenkaste brojeve kojima se ne mijenja zbroj znamenaka nakon množenja sa svakim od brojeva 2,3,4,5,6,7,8,9.(Moskovska olimpijada, 1956.)

12. Odredite najmanji sedmeroznamenkasti broj $\overline{3219abc}$ koji je djeljiv s 90. (Pripreme za natjecanje, Tuzla)

13. Odredite najmanji broj koji je 4 puta manji od broja zapisanog istim znamenkama, ali u obrnutom poretku.(Zbirka pripremnih zadataka za Mosk. MO)

14. Janez će 1986. godine imati onoliko godina koliko iznosi zbroj znamenaka godine njegovog rođenja. Koliko će godina imati Janez u 1986. godini?(savezno,1985.7r)

15. Jedan četveroznamenkasti broj ima sljedeća svojstva:
    a. prva i četvrta znamenka jednake su među sobom;

b. druga i treća znamenka jednake su među sobom;
c. broj je jednak umnošku tri uzastopna prosta broja. Koji je taj broj?(savezno 1986., 7r)

16. Na školskoj ploči je napisan troznamenkasti broj **8. Tri učenika su pogađala svojstva ovog broja.
    Goran: Sve su mu znamenke parne i ima paran broj različitih prostih djelitelja.
    Ivan: Djeljiv je sa 9 i predstavlja kvadrat nekog prirodnog broja.
    Nikola: Manji je od 400 i 13 puta je veći od kvadrata jednog prirodnog broja.
    Ispostavilo se da je svako od njih samo po jedno svojstvo točno prognozirao. Koje znamenke stoje umesto zvjezdica? (savezno 1986., 8r)

17. Neki se troznamenkasti broj poveća za 45, ako znamenke jedinica i desetica zamijene mjesta, a isti broj se smanji za 270, ako znamenke stotica i desetica zamijene mjesta. Što će se dogoditi s tim brojem ako znamenka stotica i jedinica zamijene mjesta? (savezno 1987.,7r)

18. Odredite sve troznamenkaste brojeve čije su sve znamenke različite, sa svojstvom da je troznamenkasti broj djeljiv sa 7 i da je zbroj njegovih znamenaka također djeljiv sa 7. (savezno 1989. 7r)

19. Je li moguće da zbroj brojeva 1 + 2 + 3 +...+ p, za bilo koji prirodni broj p, završava znamenkama 1989? Obrazložite. (savezno 1989. ,8r)

20. Zbroj znamenaka broja A je B, a zbroj znamenaka broja B je C. Ako je $A + B + C = 60$, odredite broj A. (savezno 1989. ,8r)

21. Neki je dvoznamenkasti broj djeljiv s 3. Ako među njegovim znamenkama umetnemo 0 i dobivenom troznamenkastom broju pribrojimo dvostruku znamenku njegovih stotica, dobit ćemo broj 9 puta veći od prijašnjeg. Nađite početni dvoznamenkasti broj.(Zadaci s ruskih mat. natj., I.L.Babinskaja)

22. Zbroj znamenki troznamenkastog broja je 7. Dokažite da je broj djeljiv sa 7 onda i samo onda ako su jednake njegove znamenke desetica i jedinica. (Zadaci s ruskih mat. natj., I.L.Babinskaja)

23. Svaka je od deset znamenki 0,1,2,3,..,9 zapisana na dva papirića. Dokažite da tih 20 papirića ne možemo poredati u niz tako da među dva papirića s jednakom znamenkom k bude točno k papirića (za k = 0,1,2,...,9). (Zadaci s ruskih mat. natj., I.L.Babinskaja).

24. Dokažite da ima najmanje 666 pozitivnih složenih brojeva koji imaju 2006 znamenaka, od kojih je jedna jednaka 7, a sve ostale su jednake 1.(shortlist, JBMO)

Rješenja zadataka:

1. 1089,
2. omjer je 2:1
3. Ostaje broj 99999785960616263....99100
4. 0 ili 6
5. 2233
6. Zbroj je djeljiv s 2,3,37
7. 90,81,72,63,54
8. 2156, 3564, 5819
9. 592
10. 8181
11. 18, 45, 90, 99
12. 3219030
13. 8712
14. 21 godinu
15. 1001
16. 108,468
17. poveća se za 118
18. Brojevi su: 329,392, 518, 581
19. Nema rješenja.
20. Brojevi su: 44, 50 i 47.

21.69