Djeljivost - Diofantske jednadžbe

Vanja Wagner

prosinac 2016.

Diofantske jednadžbe su polinomijalne jednadžbe s dvije ili više nepoznanica čija rješenja tražimo u skupu cijelih brojeva. Linearna diofantska jednadžba s dvije nepoznanice je jednadžba oblika

$$ax + by = c,$$

gdje su $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Diofantske jednadžbe mogu sadržavati i razne potencije nepoznanica (x^n i y^n, $n \geq 2$), kao i njihove produkte.

U ovom predavanju obradit ćemo tri osnovne metode rješavanja Diofanstkih jednadžbi:

1. metodu faktorizacije
2. metodu kvocijenata
3. metodu ostataka

PRIMJER 1 - metoda faktorizacije
Zbroj nekoliko uzastopnih prirodnih brojeva je 1000. Odredi te brojeve.
Rješenje: Neka je n prvi broj u nizu duljine $k+1$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$,

$$n + (n+1) + ... + (n+k) = 1000.$$

Po Gaussovoj formuli slijedi da je $\frac{(n+n+k)(k+1)}{2} = 1000$, odnosno

$$(2n+k)(k+1) = 2000.$$

Obzirom da tražimo cjelobrojna rješenja jednažbe, svaki od faktora s lijeve strane mora biti djelitelj broja s desne. Uočimo da je $2000 = 2^4 5^3$. Bez dodatnih informacija o brojevima $2n+k$ i $k+1$ imamo ukupno 20 kombinacija. No uočimo da su brojevi $2n+k$ i $k+1$ različite parnosti te da je $k+1$ nužno manji od $2n+k$,

- k paran $\Rightarrow k+1$ neparan i $2n+k$ paran
- k neparan $\Rightarrow k+1$ paran i $2n+k$ neparan
- $n \geq 1 \Rightarrow 2n+k \geq 2+k > k+1$.

Stoga se ukupan broj mogućih slučajeva smanjio na 4 i rješenja su:

- $k+1 = 1$ i $2n+k = 2000 \Rightarrow k = 0$ i $n = 1000 \Rightarrow 1000$
- $k+1 = 5$ i $2n+k = 400 \Rightarrow k = 4$ i $n = 198 \Rightarrow 198, .., 202$

- $k+1=16$ i $2n+k=125 \Rightarrow k=15$ i $n=55 \Rightarrow 55,..,70$
- $k+1=25$ i $2n+k=80 \Rightarrow k=24$ i $n=28 \Rightarrow 28,...,52$ $\square$

PRIMJER 2 - metoda kvocijenata
Odredi sve parove $x, y \in \mathbb{Z}$ koji zadovoljavaju jednadžbu

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}=1.$$

Rješenje: Uočimo da je nužno $x \neq 0$ i $y \neq 0$. Množenjem jednadžbe s xy slijedi da je

$$y+x+1=xy.$$

Ideja je izraziti jednu nepoznanicu preko druge, npr. x preko y. Slijedi

$$x(y-1)=y+1 \;\Rightarrow\; x=\frac{y+1}{y-1}=\frac{y-1+2}{y-1}=\frac{y-1}{y-1}+\frac{2}{y-1}=1+\frac{2}{y-1}.$$

Kako je $x \in \mathbb{Z}$ nužno slijedi da je $y-1$ djelitelj broja 2, odnosno $y-1 \in \{-2,-1,1,2\}$. Imajući na umu uvjet $x \neq 0$ i $y \neq 0$ jedina dva rješenja su $(3,2)$ i $(2,3)$.
Napomena: Uočimo da smo ovu jednadžbu mogli jednostavno riješiti i metodom faktorizacije,

$$y-xy+x-1+2=0 \;\Rightarrow\; (1-x)(y-1)=-2.$$

$\square$

PRIMJER 3 - metoda ostataka
Za gradnju vodovoda duljine 70m mogu se rabiti cijevi duljine 3m i 5m (bez rezanja). Na koliko načina možemo odabrati cijevi za gradnju vodovoda?
Rješenje: Označimo s x i y broj cijevi duljina 3m i 5m, $x, y \in \mathbb{N}_0$. Nužno je

$$3x+5y=70.$$

Kako su rješenja iz skupa $\mathbb{N}_0$ vidimo da y može poprimati vrijednosti iz skupa $\{0,1,...,14\}$. No da ne bi morali ispitivati svih 15 slučajeva uočimo kako 5 dijeli i $5y$ i 70, pa prema tome mora dijeliti i x. Slijedi da je $x=5k$ za neki $k \in \mathbb{N}_0$ te

$$15k+5y=70 \;\Rightarrow\; 3k+y=14.$$

Uočimo sada da je k nužno iz skupa $\{0,...,4\}$. Ukupno imamo 5 rješenja:

- $k=0 \;\Rightarrow x=0$ i $y=14$,
- $k=1 \;\Rightarrow x=5$ i $y=11$,
- $k=2 \;\Rightarrow x=10$ i $y=8$,
- $k=3 \;\Rightarrow x=15$ i $y=5$,
- $k=4 \;\Rightarrow x=20$ i $y=2$.

$\square$

ZADACI
(izvor: V. Stošić - Natjecanja učenika osnovnih škola, Matkina biblioteka)

1. Ako zbroju godina dvoje djece dodamo njihov umnožak dobijemo 34. Koliko su stara djeca? (Rješenje: $(4,6)$, $(6,4)$)
2. Voćar je vlasnik 441 stabla masline i želi ih podijeliti svojoj djeci i unucima i to tako da svako dijete dobije 5 stabala više od svakog unuka. Koliko djece i unučadi ima voćar ako ih je ukupno 18, te koliko stabala je dobilo svako dijete i svako unuče? (Rješenje: $(9,9,27,22)$)
3. Na natjecanjima iz matematike bilo je 140 učenika i svaki učenik je dobio točno jedan sok. Ako su sokovi bili pakirani u pakete od po 16, 17 ili 40 komada, koliko je bilo kojih paketa? (Rješenje: $(2,4,1)$)
4. Odredite sve $n \in \mathbb{Z}$ takve da je $\sqrt{n^2+4n-5}$ cijeli broj. (Rješenje: $n \in \{-7,-5,1,3\}$)
5. Odredite sve $a,b,c \in \mathbb{Z}$ za koje je
$$\begin{aligned} &a^2+2b^2-2bc = 121 \\ &2ab-c^2 = 121. \end{aligned}$$
(Rješenje: (11,11,11) i (-11,-11-11))
6. Za koju vrijednost parametra $m \in \mathbb{Z}$ sustav
$$\begin{aligned} &mx-y = 2 \\ &2x+y = 3m \end{aligned}$$
ima cjelobrojna rješenja? (Rješenje: $m \in \{-6,-4,-3,-1,0,2\}$)
7. Odredite sve $x,y,z \in \mathbb{N}$, $x<y<z$, za koje vrijedi da je
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 1.$$
(Rješenje: (2,3,6))