

# NT konstrukcije?

Daniel Paleka

9. svibnja 2017.

1. Postoje li dvije različite potencije broja 2 koje imaju isti multiskup znamenaka? (Nema vodećih nula.)
2. Postoji li nekonstantan beskonačan aritmetički niz prirodnih brojeva koji sadrži točno jedan kvadrat?
3. Pronađi sve parove  $(m, n)$  cijelih brojeva za koje jednadžba  $x^3 + y^3 = m + 3nxy$  ima beskonačno mnogo cjelobrojnih rješenja  $(x, y)$ .
4. (Putnam 1988) Odredi postoje li prirodni brojevi  $a, b, c, d > 1987$  za koje vrijedi

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = abc + abd + acd + bcd.$$

5. (USA TST 2012) Odredi postoje li prirodni brojevi  $a, b, c > 2010$  za koje vrijedi

$$a^3 + 2b^3 + 4c^3 = 6abc + 1.$$

6. (Kina 2014) Neka je  $k > 3$  neparan prirodan broj. Postoji li beskonačno mnogo  $n$  sa sljedećim svojstvom: postoje dva prirodna djelitelja od  $\frac{n^2+1}{2}$  sume  $n + k$ ?
7. (ELMO SL 2012) Neka je  $s(k)$  broj načina na koji se  $k$  može zapisati kao zbroj različitih 2012-tih potencija prirodnih brojeva (poredak nije bitan). Postoji li realan broj  $c > 0$  takav da je  $s(n) < cn$  za svaki prirodan  $n$ ?
8. (RMM 2010) Odredi postoje li cjelobrojni polinom  $f(x_1, x_2)$  u dvije varijable i dvije točke  $A = (a_1, a_2)$  i  $B = (b_1, b_2)$  u ravnini takve da su zadovoljeni sljedeći uvjeti:
  - (i)  $A$  je cjelobrojna točka ( $a_1$  i  $a_2$  su cijeli brojevi);
  - (ii)  $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| = 2010$ ;
  - (iii)  $f(n_1, n_2) > f(a_1, a_2)$  za sve točke  $(n_1, n_2) \neq (a_1, a_2)$  u ravnini;
  - (iv)  $f(x_1, x_2) > f(b_1, b_2)$  za sve točke  $(x_1, x_2) \neq (b_1, b_2)$  u ravnini.
9. (Kina TST 2009) Postoji li aritmetički niz od 40 članova takav da se svaki član može zapisati kao  $2^n + 3^m$ , gdje su  $n$  i  $m$  nenegativni cijeli brojevi?

10. (USA TST 2013) Postoji li cjelobrojni polinom  $P(x, y, z)$  u tri varijable takav da prirodan broj *nije* kvadrat ako i samo ako postoji trojka prirodnih brojeva  $(x, y, z)$  takva da je  $P(x, y, z) = n$ ?
11. Za skup  $A \subset \mathbb{N}$ , neka je  $LCM(A)$  najveći zajednički višekratnik elemenata skupa  $A$ , i neka je  $P_k(A)$  skup svih podskupova veličine  $k$  skupa  $A$  za svaki prirodan  $k$ .  
Neka je  $f_k(A) = \max_{S \subset P_k(A)} LCM(S)$ .
- a) Postoji li realan broj  $c > 0$  takav da je  $f_2(A) > c|A|^2$  za svaki  $A \subset \mathbb{N}$ ,  $|A| \geq 2$ ?
- b) (\*) Postoji li realan broj  $c > 0$  takav da je  $f_3(A) > c|A|^3$  za svaki  $A \subset \mathbb{N}$ ,  $|A| \geq 3$ ?
12. (\*\*\*) Postoji li beskonačan aritmetički niz prirodnih brojeva takav da se nijedan njegov član ne može zapisati kao  $2^k + p$ , gdje je  $k$  nenegativan cijeli broj, a  $p$  prost ili broj 1?