Tetivni četverokut

Borna Vukorepa

prosinac 2016.

Uvod

- svakom trokutu se može opisati kružnica
- simetrale stranica trokuta sijeku se u jednoj točki i ona je središte te kružnice (dokažite to)
- ne može se svakom četverokutu opisati kružnica (primjeri)
- četverokut kojem se može opisati kružnica zove se tetivni četverokut

Četverokut $ABCD$ je tetivan ako vrijedi bar jedna od donjih tvrdnji. U tom slučaju vrijede sve navedene tvrdnje.

- simetrale stranica četverokuta $ABCD$ sijeku se u jednoj točki (koja je tada središte njemu opisane kružnice)
- $\sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC = 180°$
- $\sphericalangle BCD + \sphericalangle DAB = 180°$
- $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$
- $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB$
- $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BDC$
- $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD$
- Ako je S sjecište dijagonala tog četverokuta, onda je $|SA| \cdot |SC| = |SB| \cdot |SD|$
- Ako je P sjecište pravaca AB i CD, onda je $|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD|$
- Ako je Q sjecište pravaca AD i BC, onda je $|QA| \cdot |QD| = |QB| \cdot |QC|$

Zadaci s "pravokutnim" tetivnim četverokutima

1. Dokažite poznatu činjenicu da se visine trokuta ABC sijeku u jednoj točki (koja se zove ortocentar trokuta ABC).
2. Neka su A_1, B_1, C_1 nožišta visina trokuta ABC. Dokažite da je ortocentar trokuta ABC središte kružnice upisane trokutu $A_1B_1C_1$.

3. Dan je trokut ABC i njegov ortocentar H. Neka je H' osnosimetrična slika točke H s obzirom na pravac AB. Pokažite da je četverokut $AH'BC$ tetivan.

   Napomena: Drugim riječima, osnosimetrične slike ortocentra s obzirom na stranice trokuta leže na opisanoj kružnici trokuta. Činjenica koju vrijedi zapamtiti.

4. Neka je H ortocentar trokuta ABC. Dokažite da su kružnice opisane trokutima ABC, HBC, ABH i CAH međusobno sukladne.

   Napomena: Pokušajte iskoristiti prethodni zadatak.

5. Dan je trokut ABC i točka T na njegovoj opisanoj kružnici. Neka su P, Q, R nožišta okomica iz T na pravce AB, BC, CA. Dokažite da su P, Q i R kolinearne.

   Napomena: Pravac određen tim točkama zove se Simsonov pravac. Također činjenica koju vrijedi zapamtiti jer se zna pojaviti u nekim težim zadacima.

6. Dan je konveksan četverokut $ABCD$. E, F, G su redom polovišta stranica AD, DC, AB. Vrijedi da su pravci GE i AD okomiti, kao i pravci GF i CD. Koliki je $\sphericalangle ACB$?

7. Dokažite da se simetrala unutarnjeg kuta trokuta i simetrala nasuprotne stranice sijeku na opisanoj kružnici trokuta.

   Napomena: Jednostavna, ali značajna činjenica, obavezno zapamtiti.

8. Neka je I centar upisane kružnice trokuta ABC i D polovište manjeg kružnog luka AB. Dokažite da je $|AD| = |BD| = |ID|$.

   Napomena: Također poznata geometrijska činjenica koja se zna pojaviti u složenijim zadacima.

Kut tangente i tetive

1. Neka su A i B točke na kružnici k i neka je t tangenta na kružnicu u točki A. Dokažite da je kut između tangente t i tetive $\overline{AB}$ jednak obodnom kutu nad tom tetivom.

   Napomena: Ovo je poznata činjenica koju nazivamo teorem o kutu tetive i tangente. Koristi se u mnogim složenijim zadacima.

2. Neka je $\overline{AB}$ zajednička tetiva dviju kružnica. Pravac kroz A siječe jednu kružnicu još u točki C, a drugu još u točki D. Tangente u točkama C i D (na odgovarajuće kružnice) sijeku se u točki M. Dokažite da je $BCMD$ tetivni četverokut.

3. Dane su dvije kružnice K_1 i K_2 i one se sijeku u A i B. Dane su točke C na K_1 i D na K_2 tako da je AD tangenta na K_1. Dodatno, dan je i polupravac s vrhom u A koji leži unutar kuta $\sphericalangle CAD$. On siječe K_1 u M, K_2 u N i kružnicu oko ACD u P. Pokaži da su MCP i ACD slični.

4. Uz tekst kao u prošlom zadatku, dodajmo još pretpostavku da je AC tangenta na K_2. Pokažite da je tada $|AN| = |MP|$.

5. Uz sve pretpostavke kao u prošlom zadatku, dodajmo još pretpostavku da je odabrani polupravac iz A upravo polupravac AB. Pokažite da je AB simetrala kuta $\sphericalangle CBD$.

   Napomena: Prethodna tri zadatka predstavljaju osnovne ideje koje su potrebne za rješavanje zadataka u kojima je zadana konfiguracija dviju kružnica koje se sijeku i tangente u jednoj ili obje presječne točke.

Potencija točke i poučak o simetrali kuta

1. Pokažite da u tetivnom četverokutu $ABCD$ vrijede zadnja tri svojstva s prve strane. Također pokažite da ako vrijedi jedna od tih tvrdnji da je četverokut $ABCD$ tetivan.

   Napomena: Ta činjenica se zove potencija točke s obzirom na kružnicu i nezaobilazan je dio velikog broja geometrijskih zadataka.

2. Neka je dana kružnica s centrom O radijusa r. Neka su A i B dvije točke na njoj. Neka je P neka točka koja nije na kružnici. Pokažite da vrijedi jednakost $||OP|^2 - r^2| = |PA| \cdot |PB|$.

   Napomena: Uočite da je znak apsolutne vrijednosti na lijevoj strani tu zbog činjenice da je desna strana uvijek pozitivna. Ako je P unutar kružnice, tada je $|OP|^2 - r^2$ negativno. Taj izraz govori nam da se potencija točke s obzirom na kružnicu može računati iz njene udaljenosti od središta kružnice. Posebno, uočimo da dvije točke jednako udaljene od središta kružnice imaju jednaku vrijednost potencije.

3. Dan je trokut ABC i simetrala kuta u A siječe BC u D. Pokažite da je $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|DC|}$.

   Napomena: Ovo se zove poučak o simetrali kuta, također jedan od krucijalnih geometrijskih teorema koji se često kombinira s potencijom točke.

4. Simetrala kuta $\sphericalangle BAC$ u trokutu ABC siječe nasuprotnu stranicu u točki S. Točka T je polovište stranice $\overline{BC}$. Kružnica opisana trokutu AST siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki D, a stranicu $\overline{AC}$ u točki E. Dokažite da je $|BD| = |CE|$.

5. Neka je D polovište stranice $\overline{BC}$ trokuta ABC i neka je E točka na stranici $\overline{AC}$ takva da je $\sphericalangle EDA = \sphericalangle ABC$. Točkom E povučena je paralela s $\overline{BC}$ koja siječe $\overline{AD}$ u točki F. Dokažite da je $|AF| \cdot |DF| = |EF|^2$.

6. Tetiva $\overline{AB}$ paralelna je s promjerom $\overline{MN}$ kružnice. Neka je t tangenta te kružnice u točki M i neka su C i D redom sjecišta pravaca NA i NB s pravcem t. Dokažite da je $|MC| \cdot |MD| = |MN|^2$.

Razni zadaci

1. Neka je ABC šiljastokutni trokut u kojem je $|AB| \neq |AC|$. Kružnica s promjerom $\overline{BC}$ siječe stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ u točkama M i N, redom. Neka je O polovište stranice $\overline{BC}$. Simetrale kutova $\sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle MON$ sijeku se u točki R. Dokaži da se kružnice opisane trokutima BMR i CNR sijeku na stranici $\overline{BC}$.

   Napomena: Razmislite kako bi bilo najlakše pokazati da dvije kružnice i pravac prolaze istom točkom.

2. Upisana kružnica trokuta ABC dodiruje AB i AC u M i N redom. P je presjek pravca MN i simetrale kuta $\sphericalangle ABC$. Dokaži da su BP i CP okomiti.

3. Dan je trokut ABC i centar opisane kružnice mu je O. Dane su proizvoljne točke P i Q na stranicama AC i AB redom. Neka su K, L, M redom polovište dužina $\overline{BP}$, $\overline{CQ}$ i $\overline{PQ}$. Pretpostavimo da je pravac PQ tangenta na kružnicu oko trokuta KLM. Dokaži da je $|OP| = |OQ|$.

   Napomena: Sjetite se potencije točke. Što za nju mora vrijediti da bi dvije točke bile jednako udaljene od središta kružnice?

4. U ravnini kružnice K_1 i K_2 imaju središta I_1 i I_2 i sijeku se u točkama A i B. Neka je kut $\sphericalangle I_1AI_2$ tup. Tangenta na K_1 u A siječe K_2 u C i tangenta na K_2 u A siječe K_1 u D. Neka je K_3 kružnica oko BCD. Neka je E polovište luka CD kružnice K_3 koji sadrži B. AC i AD sijeku K_3 još u K i L redom. Pokaži da su pravci AE i KL okomiti.

   Napomena: Spmonijali smo ovu konfiguraciju.