Teorija grafova

9.12.2016.

Uvod

Pretpostavljamo da je čitatelj upoznat s osnovama teorije grafova i nekim bitnim svojstvima određenih vrsta grafova.

Zadatci i rješenja

Zadatak 1.
Dano je n realnih brojeva. Koliko najviše parova brojeva (x, y) može zadovoljavati $x - y \in < 1, 2 >$?

Rješenje.
Uzmimo neka tri broja ($x \leqslant y \leqslant z$) i pretpostavimo da sva tri para zadovoljavaju uvjet. Tada vrijedi:
$2 > y - x > 1$
$2 > z - y > 1$
$2 > z - x > 1$
Zbrajanjem prvih dviju nejednakosti dobivamo:
$z - x > 2$
što je kontradikcija. Konstruirat ćemo graf u kojemu čvorovi predstavljaju brojeve, a dva su povezana akko zadovoljavaju zadani uvjet. Dokazali smo da taj graf nema trokuta, tj. klika veličine 3. Poznati rezultat je da takav graf ima najviše $\lceil \frac{n^2}{4} \rceil$ veza (dokaz ove tvrdnje ostavlja se čitatelju, a možete pogledati i Mantelov teorem ili Turanov teorem koji je generalizacija ovoga). Konstrukcija je jednostavna, $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ brojeva su 1.5, a ostali 0.

Zadatak 2.
Dano je n točaka u ravnini tako da su svake dvije udaljene za barem 1. Dokaži da postoji najviše $3n$ parova brojeva udaljenih za točno 1.

Rješenje.
Konstruirat ćemo graf u kojem su dva čvora spojena akko im je udaljenost točno 1. Dokazat ćemo da je taj graf planaran. Naime, pretpostavimo suprotno, tj. da se neke dvije veze u tom grafu sjeku. Primjenom nejednakosti trokuta, dolazimo do kontradikcije (ovaj dokaz je jednostavan, i ostavlja se za vježbu čitatelju). Iz planarnosti grafa, direktno slijedi tvrdnja zadatka (ako niste upoznati s ovom tvrdnjom, pročitajte osnovna svojstva planarnih gragfova).

Zadatak 3.
(IMO 1983 shortlist) U državi ima 1983 gradova. Svaka dva su povezana cestom, a svaka cesta je u vlasništvu neke od 10 kompanija. Dokaži da postoji neparni ciklus kojemu su sve veze u vlasništvu iste kompanije.

Rješenje.
Pretpostavimo suprotno. Promatrajmo graf u kojemu smo izbacili sve veze svih kompanija osim jedne. Taj graf mora biti bipartitan što znači da je svaki grad u jednoj od dvije particije. Učinimo li to za svaku kompaniju, dobit ćemo da neki grad može imati 2^{10} različitih kombinacija particija u kojima se nalazi. Po Dirichletovom principu, postoje dva grada s istom kombinacijom tih particija, no to znači da nijedna kompanija ne posjeduje vezu između ta dva grada, što je kontradikcija.

Zadatak 4.
U sobi je $2n + 1$ ljudi. Za svaku skupinu od najviše n ljudi postoji osoba izvan te skupine koja ih sve poznaje. Dokaži da postoji osoba koja poznaje sve ostale u sobi.

Rješenje.
Konstruiramo graf na uobičajeni način. Neka je C najveća klika u tom grafu, te k njezina veličina. Ako vrijedi $k \leqslant n$, onda postoji čvor izvan C, povezan sa svim čvorovima iz C, što znači da postoji veća klika. Dakle, postoji klika veličine $n+1$. No, promatrajući skupinu ostalih n ljudi, postoji neka osoba koja ih sve poznaje. Ta osoba onda poznaje svih ostalih $2n$ ljudi.

Zadatak 5.
U državi s 1993 gradova, svaki grad ima barem 93 neusmjerene veze prema drugim gradovima. Dokaži da ako postoji put između svaka dva grada, onda postoji put između svaka dva grada koji prolazi kroz najviše 63 ceste.

Rješenje.
Pretpostavimo suprotno. Postoje dva grada tako da je najkraći put između njih duljine 64. Promatrajmo svaki treći grad na tom putu, uključujući prvi grad. Njih ima 22 i svi ti gradovi imaju međusobno disjunktne skupove susjeda, što znači da u grafu ima barem $22 * 93 = 2046$ gradova, što je kontradikcija.

Zadatak 6.
Dan je graf u kojemu kroz svaki čvor prolazi najviše n neparnih ciklusa. Dokaži da je čvorove tog grafa moguće obojati u $2n+2$ boje, tako da ne postoji veza između dva čvora iste boje.

Rješenje.
Dokle god postoji neparni ciklus u grafu, izbacit ćemo neku vezu koja je u nekom neparnom ciklusu. Graf koji smo tako dobili je bipartitan, i svakom čvoru smo maknuli najviše n veza koje idu iz njega. Obojimo taj bipartitni graf u dvije boje. Nadalje, promatramo graf u kojemu su samo one veze koje smo izbacili. Taj graf možemo obojati u $n+1$ boja jer svaki čvor ima stupanj najviše n. Označimo boje u drugom bojanju s $\{1, 2, 3, \ldots\ n+1\}$. Neka je x boja nekog čvora u tom bojanju. Tada ćemo ju promijeniti u $2x$ ili $2x+1$, ovisno o particiji tog čvora u bipartitnom grafu. Lako je provjeriti da je dano bojanje validno za originalni graf.

Zadatak 7.
(USAMO 1986/2.) Petero profesora sudjelovalo je na seminaru. Svaki profesor je zaspao točno dvaput. Za svaki par profesora postoji trenutak kad su oboje spavali. Dokažite da postoji trenutak u kojemu je spavalo barem troje profesora.

Prvo rješenje.
Pretpostavimo suprotno. Za svakog profesora postoje dva intervala u kojima spava, i nikoja tri intervala se ne sijeku. Raspisujući slučajeve, jednostavno je pokazati da u slučaju kad jedan interval ima presjek sa tri različita, dolazimo u kontradikciju. Dalje, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da se svaki interval siječe s dva druga. Izgradit ćemo graf na sljedeći način: za neka dva profesora A i B, postoje dva intervala njihovih spavanja koja se sijeku. Recimo da se profesor A prije probudi. Tada ćemo napraviti usmjerenu vezu $A \to B$. Sada, svaki čvor u grafu ima 2 ulazne i 2 izlazne veze, pa postoji Eulerov ciklus u grafu koji predstavlja redoslijed parova profesora koji spavaju u isto vrijeme. No, za čvor iz kojeg smo krenuli vrijedi da je taj profesor spavao u 3 intervala što je kontradikcija.

Drugo rješenje.
Ovaj zadatak ima i jednostavnije rješenje koje ne koristi teoriju grafova, i samo ćemo ga ukratko opisati. Naime, n intervala, od koja ne postoje tri koja imaju presjek, mogu imati najviše $n-1$ parova koji se sijeku. Ovu tvrdnju nije teško pokazati koristeći indukciju.

Zadatak 8.
(IMO 2002 Shortlist) U sobi se nalazi 120 ljudi. Svake dvije osobe su poznanici ili stranci. Slaba četvorka je skup četvero ljudi među kojima se točno jedan par međusobno poznaje. Koliko najviše slabih četvorki može biti?

Rješenje.
Prvi dio ovog rješenja vrlo je sličan dokazu Turanovog teorema. Dokazat ćemo da se maksimum postiže za graf koji je unija međusobno nepovezanih klika. Neka $f(v)$ označava broj slabih četvorki u kojima se nalazi čvor v. Također, definirat ćemo klon čvora kao novi čvor s točno onim vezama koje je imao originalni čvor. Promatrajmo graf s maksimalnim brojem slabih četvorki. Ako postoji veza $u-v$ tako da vrijedi $f(u) < f(v)$, zamjenom čvora u klonom čvora v, bez micanja veze $u-v$, dobit ćemo graf s većim brojem slabih četvorki. Broj četvorki koje sadrže čvorove u i v je ostao isti, a broj četvorki koje sadrže v, a ne čvor u se povećao. Nadalje, pretpostavimo da za svaku vezu $u-v$ u grafu, vrijedi $f(u) = f(v)$. Zamijenimo li, jedan po jedan, sve susjede nekog čvora v njegovim klonom, pritom ne mičući vezu tog čvora s v, dobit ćemo graf s istim brojem slabih četvorki. Učinimo li to redom za svaki čvor, dobit ćemo graf koji je unija nepovezanih klika. Neka su veličine tih klika brojevi $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = 120$. Tada je broj slabih četvorki $S = \sum_{i,j,k} \binom{a_i}{2} * a_j * a_k$. Zadatak smo sveli na maksimizaciju jednostavnog izraza koju ostavljamo za vježbu čitatelju.