Logički zadaci

Mea Bombardelli 11. 12. 2016.

1. zad: Učenici A, B, C, D su sudjelovali u utrci. Svaki od njih je prognozirao njihov poredak na cilju.

učenik A: $A\ B\ D\ C$
učenik B: $B\ A\ C\ D$
učenik C: $C\ B\ D\ A$
učenik D: $D\ C\ B\ A$

Nakon trke pokazalo se da nitko nije točno prognozirao redosljed, već je samo jedan od njih pogodio mjesto samo jednog učenika. Kakav je bio njihov poredak na cilju?

(*savezno natjecanje 1982, 7.r.*)

2. zad: Na školskoj ploči je napisan troznamenkasti broj **8. Tri učenika su pogađala svojstva ovog broja.

A: Sve su mu znamenke parne i ima paran broj različitih prostih djelitelja.

B: Djeljiv je sa 9 i predstavlja kvadrat nekog prirodnog broja.

C: Manji je od 400 i 13 puta je veći od kvadrata jednog prirodnog broja.

Ispostavilo se da je svaki od njih samo po jedno svojstvo točno "prognozirao". Koje znamenke stoje umjesto zvjezdica? (*savezno natjecanje 1986, 8.r.*)

3. zad: Ivica je od n^3 jediničnih kockica sastavio veliku kocku brida duljine n i zatim je neke od šest strana velike kocke obojao, a neke nije. Kada je rastavio veliku kocku, otkrio je da točno 1000 jediničnih kockica nema niti jednu obojanu stranu. Pokaži da je to zaista moguće i odredi broj strana velike kocke koje je Ivica obojao.

(*županijsko natjecanje 2013, 2.r SŠ.*)

4. zad: Na natjecanju su sudjelovala 22 učenika iz osam škola. Oni su točno riješili ukupno 50 zadataka. Svaki učenik iz iste škole riješio je jednak broj zadataka, a učenici iz raznih škola riješili su različit broj zadataka. Svaki učenik je riješio barem jedan zadatak. Koliko je ukupno učenika riješilo samo po jedan zadatak?

(*savezno natjecanje 1984, 7.r.*)

5. zad: U nekoj školi, trećina svih učenika iz zbora sudjeluju i u sportskim grupama, a četvrtina svih učenika-sportaša je u školskom zboru. Ima li u toj školi više učenika koji se bave pjevanjem ili onih koji se bave sportom?

(*Đukić: Dvostruko prebrojavanje.*)

6. zad: Na matematičkom natjecanju sudjelovalo je devet učenika. Svaki zadatak su riješila točno tri učenika i za svaki par učenika postoji točno jedan zadatak koji su oboje riješili. Koliko je zadataka postavljeno na tom natjecanju?

(*županijsko natjecanje 2002, 4.r SŠ.*)

7. zad: Brojevi od 1 do 10 napisani su u jednom redu u bilo kojem redosljedu. Prema tom redosljedu svakom broju pridružen je njegov redni broj. Zatim je svaki broj zbrojen sa svojim rednim brojem. Na taj način se dobiva deset zbrojeva. Dokaži da su znamenke jedinica kod barem dva zbroja međusobno jednake.

(*savezno natjecanje 1981, 8.r.*)

8. zad: Dokaži da u skupu od devet prirodnih brojeva, od kojih ni jedan nema prostog djelitelja većeg od 6, postoje dva broja čiji je umnožak potpun kvadrat (kvadrat nekog prirodnog broja). (*županijsko natjecanje 2011, 2.r SŠ.*)

9. zad: Krug je podijeljen na 30 isječaka u koje su upisani brojevi $1, 2, 3, \ldots, 30$ (u nekom redoslijedu). Dokaži da postoje tri uzastopna odjeljka u kojima je zbroj upisanih brojeva veći ili jednak 47. (*državno natjecanje 2002, 1.r SŠ.*)

10. zad: Supružnici Ana i Tomislav došli su na zabavu na kojoj su sudjelovala još četiri para. Prilikom dolaska dogodio se izvjestan broj rukovanja. Pritom se nitko nije rukovao sa svojim bračnim drugom niti sa samim sobom. Kada je kasnije Tomislav upitao sve prisutne s koliko su se osoba rukovali, dobio je devet različitih odgovora. S koliko se osoba rukovala Ana? (*državno natjecanje 2011, 1.r SŠ.*)

11. zad: Niz znamenaka

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 0,\ 9,\ 6,\ 9,\ 4,\ 8,\ 7,\ \ldots$$

konstruira se tako da je svaki broj, počevši od petog, jednak znamenki jedinica zbroja prethodne četiri znamenke. Pojavljuju li se u tom nizu redom znamenke

a) 2, 0, 0, 4 ? b) 1, 1, 2, 2 ? c) 1, 2, 3, 4 ?

(*državno natjecanje 2004, 1.r SŠ.*)

12. zad: Na ploču 10×10 postavljeno je 50 žetona tako da nikoja dva nisu na istom polju. Pritom 25 žetona zauzima donju lijevu četvrtinu ploče, a preostalih 25 gornju desnu četvrtinu. Neka su X, Y, Z redom tri uzastopna polja (horizontalno, vertikalno ili dijagonalno). Ako se dva žetona nalaze na poljima X i Y i ako je polje Z slobodno, žeton s polja X može se premjestiti na polje Z, preskočivši žeton na polju Y. Može li se konačnim nizom takvih poteza premjestiti svih 50 žetona na donju polovicu ploče? (*županijsko natjecanje 2010, 1.r SŠ.*)

13. zad: Na šahovskom turniru s osam sudionika svaka sva sudionika odigrala su po jednu partiju. Nakon odigrane partije pobjednik dobiva 1 bod, a poraženi 0 bodova. Ako partija završi remijem svaki dobiva po pola boda. Na kraju turnira svaka dva sudionika imala su različit broj bodova, a drugoplasirani šahist imao je toliko bodova koliko i posljednja četvorica zajedno. Kako je završila partija između trećeplasiranog i sedmoplasiranog igrača? (*županijsko natjecanje 1994, 4.r SŠ.*)

14. zad: Na beskonačnom bijelom papiru podijeljenom na jednak kvadratiće neki od njih su obojeni crvenom bojom. U svakom 2×3 pravokutniku točno dva kvadratića su crvena. Promatrajmo neki koji 9×11 pravokutnik. Koliko u njemu ima crvenih kvadratića? (*državno natjecanje 1997, 1.r SŠ.*)

15. zad: U tri kutije nalaze se kuglice: u prvoj kutiji su 2, u drugoj kutiji 3, a u trećoj kutiji 4 kuglice. Dva igrača igraju sljedeću igru: naizmjenično uzimaju iz proizvoljne kutije proizvoljan broj kuglica. Pobjednik je onaj igrač poslije čijeg poteza sve kutije ostaju prazne. Kako treba igrati prvi igrač da bi pobijedio svog protivnika?

(*savezno natjecanje 1984, 8.r.*)

16. zad: Na raspolaganju su kovanice od 1, 2, 5, 10, 20, 50 lipa i od 1 kune. Dokaži: ako se iznos od M lipa može isplatiti pomoću N kovanica, onda se iznos od N kuna može isplatiti pomoću M kovanica. (*državno natjecanje 2000, 1.r SŠ.*)