Jesenske pripreme 2016. - Polinomi

Petar Bakić

10.12.2016.

Standardne činjenice o polinomima

Funkcije oblika

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

nazivamo polinomima.

Brojevi a_i su **koeficijenti**, a n je **stupanj** polinoma p (oznaka $n = \deg p$). Najčešće promatramo polinome s realnim, kompleksnim, ili cjelobrojnim koeficijentima.

1. Dijeljenje polinoma: Teorem o dijeljenju s ostatkom je često vrlo koristan; uočimo da nam u nekim situacijama omogućava da s polinomima radimo kao s cijelimo brojevima - primjerice, možemo definirati najveći zajednički djelitelj dva polinoma i računati ga pomoću Euklidovog algoritma. Ovdje iskazujemo teorem za polinome s realnim koeficijentima, no isto možemo napraviti i za polinome iz $\mathbb{C}[x]$.

Teorem. Neka su f i p polinomi s realnim koeficijentima. Tada postoje jedinstveni polinomi q, i r za koje vrijedi

$$p = q \cdot g + r, \text{ pri čemu je } \deg r < \deg p.$$

Napomena. Teorem o dijeljenju s ostatkom možemo primijeniti i na polinome s kompleksnim koeficijentima.

Primjer. Za koje cijele brojeve x broj $x^2 + 1$ dijeli $x^3 - 8x^2 + 2x$?

Jednostavna posljedica teorema o dijeljenju s ostatkom je

Korolar: Neka je $p \in \mathbb{R}[x]$ polinom. Broj x_0 je nultočka polinoma p ako i samo ako postoji polinom q takav da vrijedi

$$p(x) = (x - x_0) q(x).$$

Zadatak. Odredite sve nultočke polinoma

$$p(z) = 2z^3 - (5 + 6i)z^2 + 9iz + 1 - 3i,$$

znajući da je barem jedna od njih realna.

2. Osnovni teorem algebre:

Teorem. Neka je $p \in \mathbb{C}[x]$ polinom. Tada p ima nultočku u skupu $\mathbb{C}$.

Kombinirajući ovo s teoremom o dijeljenju s ostatkom, lako vidimo da polinom stupnja n mora imati točno n nultočaka u skupu $\mathbb{C}$.

Zadatak. Nađite sve polinome za koje vrijedi

$$(x+1)p(x) = (x-10)p(x+1).$$

Jedna posljedica osnovnog teorema algebre je sljedeća korisna opservacija: Ako polinom stupnja n ima više od n nultočaka, onda se radi o nul-polinomu.

Zadatak. Neka je p polinom stupnja n. Ako za $k = 0, 1, \ldots, n$ vrijedi

$$p(k) = \frac{k}{k+1},$$

odredite $p(k)$ za $k > n$.

Zadatak. Odredite sve polinome $p \in \mathbb{R}[x]$ za koje postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$p\left(x + \frac{1}{n}\right) + p\left(x - \frac{1}{n}\right) = 2p(x).$$

odredite $p(k)$ za $k > n$.

3. Analitička svojstva: Često je korisno, čak i u algebarskim zadacima (kada nas možda zanimaju samo koeficijenti polinoma), promatrati polinome kao funkcije $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Neki standardni primjeri takvog zaključivanja su, npr.

Ako je $p \in \mathbb{R}[x]$ neparnog stupnja, onda poprima sve vrijednosti iz $\mathbb{R}$.

Neka je $p \in \mathbb{R}[x]$ polinom i neka su $a \neq b$ brojevi suprotnog predznaka (takvi da je $f(a)f(b) < 0$). Tada p ima nultočku između a i b.

Primjer. Pokažite da polinom

$$p(x) = x^{2016} + 2x^{2015} + \cdots + 2016x + 1000$$

ima barem jednu realnu nultočku.

Zadatak. Neka je $p \in \mathbb{R}[x]$ polinom neparnog stupnja. Pokažite da jednadžba $p(p(x)) = 0$ ima barem onoliko realnih rješenja koliko i jednadžba $p(x) = 0$.

4. Vieteove formule: objašnjavaju odnos između nultočaka i koeficijenata polinoma. Ako zapišemo polinom kao produkt linearnih faktora

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

vidimo da vrijedi

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i &= -\frac{a_{n-1}}{a_n},\\ \sum_{i\neq j}\alpha_i\alpha_j &= \frac{a_{n-2}}{a_n},\\ &\vdots\\ \prod_{i=0}^{n}\alpha_i &= (-1)^n\frac{a_0}{a_n}.\end{aligned}$$

Primjer. Riješite sustav jednadžbi

$$\begin{aligned}x+y+z&=1\\ xyz&=1\end{aligned}$$

znajući da su x, y, z kompleksni brojevi modula 1.

Zadaci

1. Promatramo polinome iz $\mathbb{C}[x]$

$$p(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

   s nultočkama $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i

$$p(x) = x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n$$

   s nultočkama $x_1^2, x_2^2, \cdots, x_n^2$. Dokažite da je, ako su brojevi $(a_1 + a_3 + a_5 + \cdots)$ i $(a_2 + a_4 + a_6 + \cdots)$ realni, i broj $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ realan.

2. U ovisnosti o parametru $a \in \mathbb{R}$ odredite realne nultočke polinoma

$$p(x) = (x^2+1)(x-1)^2 - ax^2.$$

3. Dokažite da je polinom

$$f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n) - 1$$

   (pri čemu su a_i različiti cijeli brojevi) ireducibilan, to jest da se ne može prikazati kao produkt dva nekonstantna polinoma s cjelobrojnim koeficijentima.

4. Neka je p polinom stupnja n. Ako za $k = 0, 1, \ldots, n$ vrijedi

$$p(k) = 2^k,$$

odredite $p(n+1)$.

5. Neka je p polinom s pozitivnim koeficijentima. Dokažite da, ako

$$p\left(\frac{1}{x}\right) \geqslant \frac{1}{p(x)}$$

vrijedi za $x = 1$, onda vrijedi i za svaki $x > 0$.

6. Ako je $x + y + z = 0$, dokažite da vrijedi

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \cdot \frac{x^5 + y^5 + z^5}{5} = \frac{x^7 + y^7 + z^7}{7}.$$

7. Kažemo da je niz $a_0, a_1, \ldots a_n$ realnih brojeva p-balansiran (za neki $p \in \mathbb{N}$) ako vrijedi

$$a_0 + a_p + a_{2p} + \cdots = a_1 + a_{p+1} + \cdots = \ldots = a_{p-1} + a_{2p-1} + \cdots$$

Pretpostavimo da je niz $a_0, a_1, \ldots a_{49}$ p-balansiran za $p = 3, 5, 7, 11, 13, 17$. Dokažite da je tada $a_0 = a_1 = \ldots = a_{49} = 0$.

8. Dokažite

$$\sqrt[3]{2\cos\frac{2\pi}{7}} + \sqrt[3]{2\cos\frac{4\pi}{7}} + \sqrt[3]{2\cos\frac{8\pi}{7}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(5 - 3\sqrt[3]{7})}$$

9. Neka je F_n n-ti Fibonaccijev broj te neka je p polinom stupnja 1007 takav da vrijedi $p(k) = F_k$ za $k = 1009, 1008, \ldots, 2016$. Dokažite da je $p(2017) = F_{2017} - 1$.

10. Polinom

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + 1$$

s nenegativnim koeficijentima ima n realnih nultočaka. Dokažite

a) $f(2) \geqslant 3^n$,

b) $f(x) \geqslant (x+1)^n$ za svaki $x \geqslant 0$,

c) $a_k \geqslant \binom{n}{k}$ za $k = 1, 2, \ldots, n-1$.