RMM pripreme 2016. - Algebra

Petar Orlić

11.12.2016.

1. Nađi maksimalnu vrijednost sume
$$S_n = a_1(1-a_2) + \ldots + a_n(1-a_1)$$
ako vrijedi $\frac{1}{2} \leq a_i \leq 1$ za svaki i od 1 do n.

2. Dokaži da za sve a,b,c iz intervala $[0,1]$ vrijedi:
$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{a+c+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1.$$

3. Nađi sve parove polinoma $P(x)$ i $Q(x)$ takve da za svaki realan broj x takav da ni x ni $x+1$ nisu nultočke $Q(x)$ vrijedi:
$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{P(x+1)}{Q(x+1)} = \frac{1}{x(x+2)}$$
(*Bugarska 2006.*)

4. Nađi najmanji prirodni broj n za koji se polinom
$$P(x) = x^{n-4} + 4n$$
može prikazati kao produkt 4 nekonstantna polinoma s cjelobrojnim koeficijentima.

5. Niz a_i je definiran na sljedeći način:
$$a_1 = 2, a_{n+1} = a_1 \ldots a_n + 1.$$
Dokaži da je niz $\dfrac{1}{a_i}$ za svaki prirodni broj n najbolja aproksimacija 1, tj. za svaki niz prirodnih brojeva x_i za koji je $\sum_1^n \dfrac{1}{x_i} < 1$ vrijedi
$$\sum_1^n \frac{1}{x_i} \leq \sum_1^n \frac{1}{a_i}.$$

6. Neka su a,b,c realni brojevi takvi da su ac i b racionalni te polinom $ax^2+bx+c=0$ ima racionalnu nultočku r. Dokaži da za svaki prirodni broj n postoji racionalni broj b_n takav da je r^n nultočka polinoma $a^n x^2 + b_n x + c^n = 0$.

7. Postoji li polinom P(x) s realnim koeficijentima koji nisu svi 0 za koji možemo naći funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takvu da vrijedi:
$$f(x) - \frac{x^2}{3} f\left(\frac{3x-3}{x+3}\right) = P\left(\frac{3x+3}{3-x}\right)?$$

8. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve realne brojeve x i y vrijedi:

$$(f(x) + xy)f(x - 3y) + (f(y) + xy)f(3x - y) = f(x + y)^2$$

(*USAMO 2016.*)

9. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ takve da za sve pozitivne realne brojeve x i y vrijedi:

$$f(1 + xf(y)) = yf(x + y)$$

10. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve realne brojeve x,y,z vrijedi:

$$f(x^2(z^2 + 1) + f(y)(z + 1)) = 1 - f(z)(x^2 + f(y)) - z((1 + z)x^2 + 2f(y))$$

11. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ takve da za sve cijele brojeve x,y,z vrijedi:

$$f(x^3 + y^3 + y^3) = f(x)^3 + f(y)^3 + f(z)^3$$

(*Vijetnam 2005.*)

12. Nađi sve funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da za sve realne brojeve x i y vrijedi:

$$f(x + f(x)f(y)) = f(x) + xf(y)$$