

Polinomi

Nikola Adžaga, nadzaga@grad.hr

prosinac 2016.

1. Nađi nultočke sljedećih polinoma:
 - (a) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$
 - (b) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18$
 - (c) $x^3 - 32x + 24$
 - (d) $x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 36x + 27$
 - (e) $12x^3 - 4x^2 - 3x + 1$
 - (*) $x^4 - x^3 - 8x^2 + 19x - 5$
 - (*) $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2$
 - (*) $x^4 + x^3 - 8x^2 - 9x - 9$
2. Odredi ostatak pri dijeljenju polinoma $P(x) = x^{81} + x^{49} + x^{25} + x^9 + x$ s $Q(x) = x^3 - x$.
3. Odredi a, b, c takve da je $P(x) = 2x^4 + ax^2 + bx + c$ djeljiv sa $x + 2$, a ostatak pri dijeljenju sa $x^2 - 1$ je $x - 2$,
4. Dan je polinom $P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2$ i prirodan broj k . Dokaži da je bar jedan od koeficijenata polinoma $(P(x))^k$ negativan. (Turnir gradova 2006.)
5. Postoji li polinom s cjelobrojnim koeficijentima takav da ima cjelobrojnu nultočku te da u pet različitih cjelobrojnih vrijednosti poprima vrijednost 5?
6. Neka su a, b, c tri različita cijela broja. Dokaži da ne postoji polinom P s cjelobrojnim koeficijentima takav da je $P(a) = b, P(b) = c, P(c) = a$. (USAMO 1974.)
7. Pronadite sve polinome koji imaju samo realne nultočke, a svi koeficijenti su im jednaki 1 ili -1 .
8. Nađi sve polinome koji zadovoljavaju jednadžbu $P(x^2 - 2x) = (P(x - 2))^2$ za sve realne x .

Domaća zadaća

1. Odredi sva rješenja jednadžbe $(x^2 + 3x - 4)^3 + (2x^2 - 5x + 3)^2 = (3x^2 - 2x - 1)^3$.
2. Ako je P polinom s cjelobrojnim koeficijentima takav da $2 \nmid P(0)P(1)$, dokaži da P nema cjelobrojnih nultočaka.
3. Nađi sve realne m takve da jednadžba
$$(x^2 - 2mx - 4(m^2 + 1))(x^2 - 4x - 2m(m^2 + 1)) = 0$$
ima točno tri različita rješenja. (Bugarska 1997.)
4. Nađi sve polinome koji zadovoljavaju jednadžbu $xP(x - 1) = (x - 26)P(x)$.