NEJEDNAKOSTI

U skupu realnih brojeva možemo svaka dva broja usporediti. Točno znamo da je $2 < 5$ ili $234 > 123$. Općenito :

1) Za svaka dva realna broja x i y vrijedi ili $x = y$ ili $x \leq y$ ili $x \geq y$

2) Ako za realne brojeve x i y vrijedi $x \leq y$ i $x \geq y$ onda je $x = y$ (simetričnost)

3) Ako za realne brojeve x, y, z vrijedi $x \leq y$ i $y \leq z$ onda je $x \leq z$ (tranzitivnost)

4) Ako je $x \leq y$ onda za svaki realni broj z vrijedi $x + z \leq y + z$

5) Ako je $0 \leq x$ i $0 \leq y$ onda je $0 \leq xy$

Pokušajmo sada dokazati neke jednostavne nejednakosti.

Primjer 1. Dokažimo da za sve nenegativne brojeve vrijedi: $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$.

Dokaz: Dana nejednakost je ekvivalentna s nejednakosti $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geq xy$. Kvadriramo i pomnožimo s nazivnikom:

$$x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy$$

$$x^2 + 2xy + y^2 - 4xy \geq 0$$
$$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$$

$$(x - y)^2 \geq 0$$

Jednakost će vrijediti samo ako je $x - y = 0$, odnosno $x = y$.

Primjer 2. Dokažimo da za nenegativne brojeve a, b vrijedi nejednakost $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

Dokaz se provodi na isti način kao u primjeru 1. Učinite to sami!

Primjer 3. Dokažimo nejednakost $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2(ab + bc + ca)$

Dokaz: Nejednakost možemo podijeliti s dva, ali vjerojatno ima razlog zašto je zadana ovako. Lijevu stranu napisat ćemo $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + a^2 + b^2 + c^2$.

Naš zadatak se može ovako zapisati:

$a^2 + b^2 + c^2 + a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(ab + bc + ca)$, tj.

$$a^2 + b^2 + c^2 + a^2 + b^2 + c^2 - 2ba - 2bc - 2ca \geq 0$$

Grupiramo pribrojnike:

$$a^2 - 2ba + b^2 + c^2 - 2ca + a^2 + b^2 - 2bc + c^2 \geq 0$$

Imamo: $(a - b)^2 + (c - a)^2 + (b - c)^2 \geq 0$

Time je tvrdnja dokazana. Za koje realne brojeve vrijedi jednakost?

Primjer 4. Dokažimo: Ako je $a + b \geq 1$, onda je $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$

Dokaz: Ako je $a + b \geq 1$ onda je i $a^2 + 2ab + b^2 \geq 1$

Također je $(a - b)^2 \geq 0$, tj $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$.

Zbrojimo ove dvije nejednakosti: $a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 \geq 1$,

$$2a^2 + 2b^2 \geq 1$$

$$a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$$

Kvadriramo zadnju nejednakost: $a^4 + 2a^2b^2 + b^4 \geq \frac{1}{4}$. Znamo da je $(a^2 - b^2)^2 \geq 0$. Ponovo ćemo zbrojiti ove dvije nejednakosti: $a^4 + 2a^2b^2 + b^4 + a^4 - 2a^2b^2 + b^4 \geq \frac{1}{4}$. Ako pokratimo $2a^2b^2$ i $-2a^2b^2$, te dobiveno podijelimo sa 2, dobit ćemo traženu tvrdnju.

U prethodnim primjerima koristili smo činjenicu da je zbroj kvadrata realnih brojeva uvijek nenegativan, a jednak je nuli samo ako su svi pribrojnici jednaki nuli.

Na sličan način dokažite ovu nejednakost:

<u>Zadatak 1</u>. $a^2 + 5b^2 + 8c^2 + 4 - 4ab - 4bc - 8c \geq 0$. Kada vrijedi jednakost?

Rješenje: Zapišemo: $a^2 + 4b^2 + b^2 + 4c^2 + 4c^2 + 4 - 4ab - 4bc - 8c \geq 0$

$$\underline{a^2} + \underline{4b^2} + \underbrace{b^2} + \underbrace{4c^2} + \underline{\underline{4c^2}} + \underline{\underline{4}} - \underline{4ab} - \underbrace{4bc} - \underline{\underline{8c}} \geq 0$$

Pribrojnici jednako podvučeni su poznate formule za kvadrat razlike:

$(a - 2b)^2 + (b - 2c)^2 + (2c - 2)^2 \geq 0$.

Jednakost će vrijediti samo za $a = 4, b = 2, c = 1$.

<u>Zadatak 2</u>. Neka su a i b duljine kateta, a c duljina hipotenuze pravokutnog trokuta.

Dokažite da vrijedi $\left(1 + \frac{c}{a}\right)\left(1 + \frac{c}{b}\right) \geq 3 + 2\sqrt{2}$

Rješenje: Izraze u zagradama svedemo na zajednički nazivnik i izmnožimo.

$$\left(1 + \frac{c}{a}\right)\left(1 + \frac{c}{b}\right) = \frac{c^2 + ab + c(a + b)}{ab} = \frac{c^2}{ab} + 1 + \frac{c(a + b)}{ab} = \frac{a^2 + b^2}{ab} + 1 + \frac{(a + b)\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}$$

(Koristili smo Pitagorin poučak)

Znamo da je $a^2 + b^2 \geq 2ab$, i $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (Primjer 2).

Zato je $\frac{a^2+b^2}{ab} \geq 2$ i $\frac{(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}{ab} \geq \frac{2\sqrt{ab}}{ab}\sqrt{2ab} = 2\sqrt{2}$

i konačno $\frac{a^2+b^2}{ab} + 1 + \frac{(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}{ab} \geq 2 + 1 + 2\sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2}$

Činjenica da je $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ za brojeve koji nisu negativni vrijedi i za više od dva broja. Može se dokazati da je $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$, $\frac{x+y+z+t}{4} \geq \sqrt[4]{xyzt}$,....Kako bi nejednakost glasila za n brojeva? Ovi izrazi s lijeve i desne strane su aritmetička odnosno geometrijska sredina brojeva.

Aritmetička sredina (A) općenito je veća od geomerijske sredine (G), a jednaka će biti samo ako su svi brojevi isti.

Dakle vrijedi: A≥ G.

Ponekad je dobro znati odnos još dviju sredina. To su harmonijska i kvadratna sredina. Definiramo ih za pozitivne realne brojeve x, y.

Harmonijska sredina (H) : $H = \frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

Kvadratna sredina (K): $K = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$

Pri tome vrijedi: $H \leq G \leq A \leq K$. Dokaz ove tvrdnje je jednostavan. Učinite to sami!

Jednakost vrijedi samo ako je $x = y$

Napomena: sredine vrijede za bilo koji broj pozitivnih brojeva.

<u>Zadatak 3</u>. Neka je $a, b, c \geq 0$. Tada je $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

Uputa: Na svaku zagradu primjenimo A-G nejednakost.

<u>Zadatak 4.</u> Ako su $a, b > 0$ $t$akvi da je $a+b=1$ onda je $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) \geq 9$

Uputa: Znamo da je $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, $2\sqrt{ab} \leq 1$, $4ab \leq 1$. $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) = 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab} = 1+\frac{a+b}{ab}+\frac{1}{ab} =$

$$1+\frac{2}{ab} \geq 1+2 \cdot 4 = 9$$

<u>Zadatak 5</u>. Neka su $a, b, c \geq 0$. Tada je $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$

Uputa: $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = \frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c} = \left(1+\frac{b+c}{a}\right)+\left(1+\frac{a+c}{b}\right)+\left(1+\frac{b+a}{c}\right) =$

$$3+\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{b+a}{c} \geq (A-G)\ 3+3 \cdot \sqrt[3]{\frac{b+c}{a}\frac{a+c}{b}\frac{b+a}{c}} \geq 3+3 \cdot \sqrt[3]{\frac{2\sqrt{bc}2\sqrt{ac}2\sqrt{ba}}{abc}} = 3+3 \cdot \sqrt[3]{8} = 9$$

<u>Zadatak 6</u>. Dokažite da za pozitivne brojeve x, y vrijedi: $x^4 + y^3 + x^2 + y + 1 > \frac{9}{2}xy$

Uputa: Primjenimo A-G nejednakost na $x^4 + 1$ i na $y^3 + y$. Nakon toga zbrojimo nejednakosti.

$$x^4 + 1 + y^3 + y \geq 2x^2 + 2y^2 \ /{+x^2}$$

$$x^4 + y^3 + x^2 + y + 1 \geq 3x^2 + 2y^2 \geq 2 \cdot \sqrt{3x^2 \cdot 2y^2} = 2xy\sqrt{6} > 2xy\sqrt{\frac{81}{16}} = 2xy \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{2}xy$$

U nekim zadacima poželjno je prvo napraviti supstituciju pa tek onda rješavati. Pogledajmo ovaj primjer:

<u>Primjer 5</u>. Dokažimo : Neka su $a, b, c \geq 0$. Tada je $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

Dokaz: Uvedemo oznake $x = b + c, y = c + a, z = a + b$. Zbrajanjem ovih jednakosti dobit ćemo $x + y + z = 2(a + b + c), a + b + c = \frac{1}{2}(x + y + z),\ a + x = \frac{1}{2}(x + y + z),$

$$a = \frac{1}{2}(y + z - x)$$

i analogno $b = \frac{1}{2}(x + z - y),\ c = \frac{1}{2}(x + y - z)$

Naš zadatak sada glasi: $\frac{z+y-x}{2x} + \frac{x+z-y}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} = \underline{\frac{y}{2x}} + \underline{\underline{\frac{z}{2x}}} - \frac{1}{2} + \underline{\frac{x}{2y}} + \underbrace{\frac{z}{2y}} - \frac{1}{2} + \underline{\underline{\frac{x}{2z}}} + \underbrace{\frac{y}{2z}} - \frac{1}{2}$

Na pribrojnike podvučene na isti način primjenimo A-G nejednakost:

$\left(\frac{\frac{y}{2x}+\frac{x}{2y}}{2} \geq \sqrt{\frac{x}{2y}\frac{y}{2x}} = \frac{1}{2},\ \ \frac{y}{2x} + \frac{x}{2y} \geq 1\right)$

Sada je $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq 1 + 1 + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

<u>Zadatak 7</u>. Dokažite: Zadani su realni brojevi a, b, c takvi da je $0 < c < b < a$ .Tada je

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$$

Uputa: Koristite supstituciju $c = x^2,\ a - c = y^2,\ b - c = z^2$. Nakon sređivanja dobit ćemo $(yz - x^2)^2 \geq 0$

Zadaci za vježbu

1. Neka je $a > b$, $ab = 1$. Dokažite da je $\frac{a^2+b^2}{a-b} \geq 2\sqrt{2}$
2. Dokažite da za pozitivne brojeve a, b, c , $a + b + c = 1$ vrijedi $ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}$.
3. Ako je $a \geq 0$, onda je $a^3 + 2 \geq a^2 + 2\sqrt{a}$. Dokažite.
4. Dokažite: $a^2(1 + b^2) + b^2(1 + c^2) + c^2(1 + a^2) \geq 6abc$
5. Ako je $a \leq b \leq c$, onda je $c^2 - b^2 + a^2 \geq (c - b + a)^2$. Dokažite.
6. Ako je $x > -1$ onda je $\frac{x+x^2+x^3+x^4}{1+x^5} \leq 2$. Dokažite.
7. Ako je $x + y + z = 1$ onda je $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$
8. Neka su $a, b, c \geq 0$. Tada je $\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{b+a-c} \geq 3$
9. Neka je $a, b, c \geq 1$. Tada je $\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1} < \sqrt{c(ab+1)+1}$. Dokažite.
10. Neka su $a, b, c \geq 0$ i $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} =1$. Tada je $(a-1)(b-1)(c-1) \geq 8$
11. Neka su $x, a, b, c, d, e, f > 0$, $a + b + c + d + e + f = 9$.
    Tada je $\frac{x^{a-b}}{a+b} + \frac{x^{b-c}}{b+c} + \frac{x^{c-d}}{c+d} + \frac{x^{d-e}}{d+e} + \frac{x^{e-f}}{e+f} + \frac{x^{f-a}}{f+a} \geq 2$. Dokažite.
12. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Dokažite da vrijedi
$$\frac{a^4 + 3ab^3}{a^3 + 2b^3} + \frac{b^4 + 3bc^3}{b^3 + 2c^3} + \frac{c^4 + 3ca^3}{c^3 + 2a^3} \leq 4$$
13. Dokažite da za sve realne brojeve a, b, c vrijedi
$$\frac{1}{3}(a + b + c)^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2(a - b + 1)$$
14. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi za koje vrijedi $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{2}$. Dokažite nejednakost
$$\frac{1 - a^2 + c^2}{c(a + 2b)} + \frac{1 - b^2 + a^2}{a(b + 2c)} + \frac{1 - c^2 + b^2}{b(c + 2a)} \geq 6$$
15. Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi takvi da je $x^2 + y^2 + z^2=1$. Odredite najmanju vrijednost zbroja $S = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}$. Za koje brojeve se postiže?

16. (SAVEZNO NATJECANJE, 8. razred, 1987. godina)

    Za koje vrijednosti x, y, z izraz $x^2 + y^2 + z^2 - 12y - 14z + 90$ ima najmanju vrijednost? Nađite tu vrijednost!

17. (SAVEZNO NATJECANJE, 8. razred, 1986. godina)

    U pravokutnom trokutu ABC katete su a i b, hipotenuza c i hipotenuzina visina h. Dokažite da je $c + h > a + b$.

18. (SAVEZNO NATJECANJE , 8. razred, 1985. godina)

    Za koji je par vrijednosti x i y polinom P(x, y) = $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13$ ima najmanju vrijednost?

19. (1. BALKANSKA MATEMATIČKA OLIMPIJADA,1. razred, Atena, Grčka, 1984.)
    Neka su $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ pozitivni realni brojevi ($n \geq 2$) čiji je zbroj jednak 1. Dokažite da je

$$\frac{a_1}{1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n} + \frac{a_2}{1 + a_1 + a_3 + \cdots + a_n} + \cdots + \frac{a_n}{1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}} \geq \frac{n}{2n - 1}$$