ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

1. razred – srednja škola – A varijanta

28. veljače 2017.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-1.1.

Izračunaj zbroj

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}.$$

Prvo rješenje.

Racionalizacijom nazivnika dobivamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} &= \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}\cdot\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}} && \text{2 boda}\\
&= \frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2 n-n^2(n+1)}=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)} && \text{1 bod}\\
&= \frac{\sqrt{n}}{n}-\frac{\sqrt{n+1}}{n+1}. && \text{4 boda}
\end{aligned}$$

Traženi zbroj je

$$\frac{\sqrt{1}}{1}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}+\ldots+\frac{\sqrt{99}}{99}-\frac{\sqrt{100}}{100}=1-\frac{10}{100}=\frac{9}{10}. \qquad \text{3 boda}$$

Drugo rješenje.

Prije racionalizacije možemo izlučiti zajednički faktor u nazivniku:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} &= \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}\cdot(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} && \text{1 bod}\\
&= \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\cdot\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} && \text{2 boda}\\
&= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}. && \text{4 boda}
\end{aligned}$$

Traženi zbroj je

$$\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{100}}=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}. \qquad \text{3 boda}$$

Zadatak A-1.2.

Gargamel je uhvatio N Štrumpfova i raspodijelio ih u tri vreće. Kad je Papu Štrumpfa iz prve vreće premjestio u drugu, Mrguda iz druge u treću, a Štrumpfetu iz treće u prvu, prosječna visina Štrumpfova u prvoj vreći se smanjila za 8 milimetara, a prosječne visine Štrumpfova u drugoj i trećoj vreći su se povećale redom za 5 milimetara i 8 milimetara.

Ako je u prvoj vreći bilo devet Štrumpfova, odredi N.

Rješenje.

Neka je u drugoj vreći bilo K Štrumpfova, a u trećoj vreći L Štrumpfova. Neka su x, y i z redom visine Papa Štrumpfa, Mrguda i Štrumpfete.

Ako su visine Štrumpfova u prvoj vreći x, x_2, x_3, $\ldots$, x_9, onda je

$$\frac{x + x_2 + \ldots + x_9}{9} = 8 + \frac{z + x_2 + \ldots + x_9}{9},$$

tj.

$$\frac{x}{9} = 8 + \frac{z}{9}.$$ 3 boda

Analogno, promatrajući prosjek u drugoj i trećoj vreći dobivamo

$$5 + \frac{y}{K} = \frac{x}{K}, \quad 8 + \frac{z}{L} = \frac{y}{L}.$$ 2 boda

Imamo sustav

$$\begin{aligned} x &= 72 + z, \\ 5K + y &= x, \\ 8L + z &= y. \end{aligned}$$

Zbrojimo li sve tri jednadžbe dobivamo

$$72 = 5K + 8L.$$ 2 boda

Budući da su K i L prirodni brojevi, zaključujemo da 8 dijeli K.

Nije moguće $K \geqslant 16$ jer bi tada L bio negativan, niti $K = 0$ jer druga vreća nije prazna (u njoj je na početku bio Mrgud), pa mora vrijediti $K = 8$. 2 boda

Zaključujemo da je $L = 4$. Budući da vrijedi $N = K + L + 9$, slijedi $N = 21$. 1 bod

Zadatak A-1.3.

Odredi sve troznamenkaste prirodne brojeve n za koje brojevi n i n^2 imaju jednake zadnje tri znamenke.

Prvo rješenje.

Tražimo sve troznamenkaste brojeve za koje 1000 dijeli $n^2 - n$.

Budući da je $1000 = 2^3 \cdot 5^3$, a 2 i 5 su relativno prosti, $n^2 - n$ je višekratnik od 1000 ako i samo ako je višekratnik od 8 i višekratnik od 125. 2 boda

Kako je $n^2 - n = n(n-1)$, a n i $n-1$ su relativno prosti, zaključujemo da 125 dijeli $n^2 - n$ ako i samo ako $125 \mid n$ ili $125 \mid n-1$. 2 boda

Analogno zaključujemo da $8 \mid n$ ili $8 \mid n-1$. 2 boda

- Ne postoji troznamenkasti prirodni broj n takav da vrijedi $8 \mid n$ i $125 \mid n$. 1 bod
- Ne postoji troznamenkasti prirodni broj n takav da vrijedi $8 \mid n-1$ i $125 \mid n-1$. 1 bod
- Jedini troznamenkasti prirodni broj n za koji vrijedi $8 \mid n-1$ i $125 \mid n$ je $n = 625$. 1 bod
- Jedini troznamenkasti prirodni broj n za koji vrijedi $8 \mid n$ i $125 \mid n-1$ je $n = 376$. 1 bod

Rješenja su 376 i 625.

Napomena: Jednom kad zaključimo da 125 dijeli n ili $n-1$ možemo provjeriti sve takve troznamenkaste brojeve. To je ukupno 14 brojeva (125, 126, 250, 251, 375, 376, 500, 501, 625, 626, 750, 751, 875, 876).

Zaključak da 125 dijeli n ili $n-1$ nosi 4 boda, a pronalaženje svakog od dva rješenja po 1 bod. Provjera za ostalih 12 brojeva nosi ukupno 4 boda. Ako učenik ne napravi direktnu provjeru (izračuna n^2) ili ne argumentira na neki drugi način zašto neki od tih brojeva nema traženo svojstvo, dobiva 3 boda ako je provjerio 11 brojeva, 2 boda ako je provjerio barem 9 brojeva, te 1 bod ako je provjerio barem 6 brojeva.

Drugo rješenje.

Neka je $n = \overline{abc}$.

Tada postoji prirodni broj k takav da je $(100a + 10b + c)^2 = 1000k + 100a + 10b + c$, tj.

$$10000a^2 + 100b^2 + c^2 + 2000ab + 200ac + 20bc = 1000k + 100a + 10b + c. \qquad (\spadesuit)$$

Lijeva strana pri dijeljenju s 10 daje isti ostatak kao i broj c^2, a desna strana daje ostatak c. Dakle, c i c^2 moraju imati istu zadnju znamenku. Jedine mogućnosti za c su 0, 1, 5 i 6. 2 boda

- Uvrstimo li $c = 0$ u ($\spadesuit$) i podijelimo s 10, dobivamo

  $$10(10a + b)^2 = 100k + 10a + b.$$

  Budući da je $b < 10$, zaključujemo da mora vrijediti $b = 0$. 1 bod
  Nadalje, vrijedi

  $$1000a^2 = 100k + 10a, \quad \text{tj.} \quad 100a^2 = 10k + a$$

  iz čega zaključujemo da je $a = 0$.
  U ovom slučaju nema rješenja jer $\overline{abc} = \overline{000}$ nije troznamenkasti broj. 1 bod

- Uvrstimo li $c = 1$ u (♠) i podijelimo s 10, dobivamo

$$1000a^2 + 10b^2 + 200ab + 20a + 2b = 100k + 10a + b.$$

Promatrajući opet ostatke pri dijeljenju s 10 zaključujemo da $2b$ i b imaju istu zadnju znamenku, tj. da je $b = 0$. 1 bod

Nakon toga zaključujemo da je $a = 0$. Ni u ovom slučaju nema rješenja jer $\overline{abc} = \overline{001}$ nije troznamenkasti broj. 1 bod

- Uvrstimo li $c = 5$ u (♠), nakon sređivanja i dijeljenja s 10, dobivamo

$$1000a^2 + 10b^2 + 2 + 200ab + 100a + 10b = 100k + 10a + b.$$

Promatrajući ostatak pri dijeljenju s 10, zaključujemo da je $b = 2$. 1 bod

Nadalje, vrijedi

$$1000a^2 + 40 + 2 + 400a + 100a + 20 = 100k + 10a + 2,$$

tj. $100a^2 + 4 + 50a + 2 = 10k + a$. Dakle, $9a$ daje ostatak 4 pri dijeljenju s 10 i zato mora biti $a = 6$. Dobili smo rješenje $n = 625$. 1 bod

- Uvrstimo li $c = 6$ u (♠), nakon sređivanja i dijeljenja s 10, dobivamo

$$1000a^2 + 10b^2 + 3 + 200ab + 120a + 12b = 100k + 10a + b.$$

Promatrajući ostatke pri dijeljenju s 10, zaključujemo da je $b = 7$. 1 bod

Nadalje, vrijedi

$$1000a^2 + 490 + 3 + 1400a + 120a + 84 = 100k + 10a + 7,$$

tj. $100a^2 + 49 + 142a + 8 = 10k + a$. Slijedi da je $a = 3$. Dobili smo rješenje $n = 376$. 1 bod

Traženi brojevi su $n = 376$ i $n = 625$.

Zadatak A-1.4.

Točke M i N se nalaze redom na stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ kvadrata $ABCD$ tako da je $\sphericalangle BMA = \sphericalangle NMC = 60°$. Odredi kut $\sphericalangle MAN$.

Prvo rješenje.

Neka je a duljina stranice kvadrata $ABCD$.

Budući da je ABM polovica jednakostraničnog trokuta vrijedi

$$|AB| = |BM|\sqrt{3}, \quad \text{tj.} \quad |BM| = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

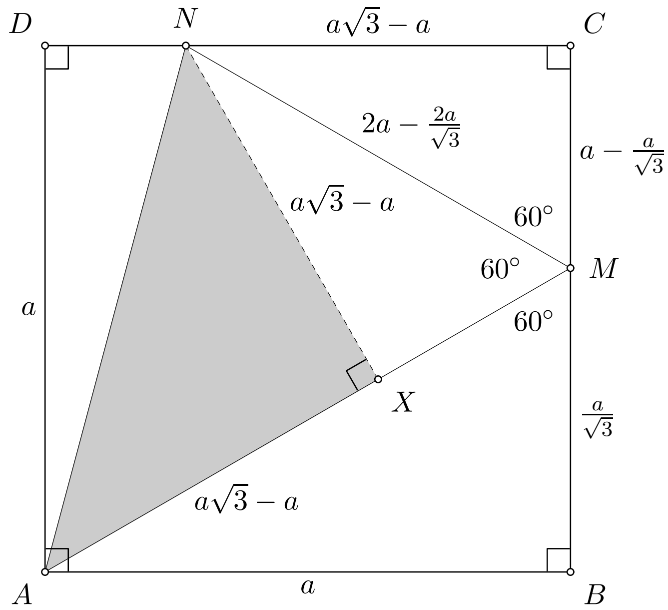
i

$$|AM| = 2|BM| = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$ 1 bod

Budući da je i MCN polovica jednakostraničnog trokuta vrijedi

$$|CM| = |BC| - |BM| = a - \frac{a}{\sqrt{3}},$$
$$|CN| = |CM|\sqrt{3} = a\sqrt{3} - a,$$
$$|MN| = 2|CM| = 2a - \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$ 1 bod

Neka je točka X nožište okomice iz točke N na dužinu $\overline{AM}$. 2 boda



Budući da je $\sphericalangle AMB = 60^\circ$ i $\sphericalangle NMC = 60^\circ$, vrijedi i $\sphericalangle XMN = \sphericalangle AMN = 60^\circ$. Zato je i trokut MNX polovica jednakostraničnog trokuta pa vrijedi

$$|MX| = a - \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad |NX| = a\sqrt{3} - a.$$ 2 boda

Konačno,

$$|AX| = |AM| - |XM| = \frac{2a}{\sqrt{3}} - \left(a - \frac{a}{\sqrt{3}}\right) = a\sqrt{3} - a.$$ 1 bod

Uočavamo da je $|AX| = |XN|$, 1 bod

pa je trokut ANX jednakokračan i pravokutan (s pravim kutom u vrhu X). Stoga je $\sphericalangle XAN = 45^\circ$ odnosno $\sphericalangle MAN = 45^\circ$. 2 boda

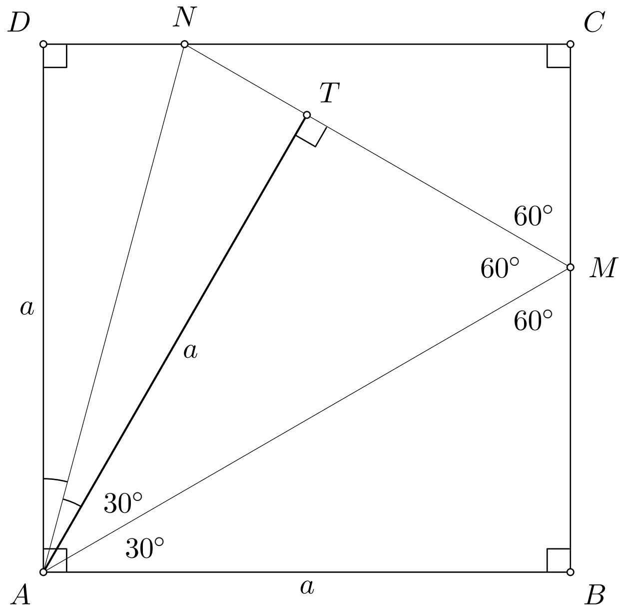
Drugo rješenje.

Neka je a duljina stranice kvadrata $ABCD$.

Neka je točka T nožište visine iz vrha A na stranicu $\overline{MN}$ u trokutu AMN. 2 boda

Budući da je $\sphericalangle AMB = 60°$ i $\sphericalangle NMC = 60°$, slijedi da je $\sphericalangle AMT = 60°$.

Pravokutni trokuti ABM i ATM imaju iste kutove i zajedničku hipotenuzu $\overline{AM}$, pa zaključujemo da su sukladni. 1 bod



Slijedi da je $|AT| = |AB| = a$ i $\sphericalangle MAT = \sphericalangle MAB = 30°$. 2 boda

Trokuti ADN i ATN su sukladni jer su oba pravokutni, imaju zajedničku hipotenuzu $\overline{AN}$ i vrijedi $|AT| = a = |AD|$. Zato je

$$\sphericalangle TAN = \sphericalangle DAN.$$ 3 boda

Sada zaključujemo da je

$$\sphericalangle MAN = \sphericalangle MAT + \sphericalangle TAN = \frac{1}{2}\sphericalangle BAT + \frac{1}{2}\sphericalangle TAD = \frac{1}{2}\sphericalangle BAD = 45°.$$ 2 boda

Napomena: Jednom kad znamo da je $\sphericalangle TAN = \sphericalangle NAD$ i da je $\sphericalangle BAT = \sphericalangle BAM + \sphericalangle MAT = 60°$, možemo zaključiti da je

$$2\sphericalangle TAN = \sphericalangle TAN + \sphericalangle NAD = \sphericalangle DAT = 90° - \sphericalangle BAT = 30°,$$

tj.

$$\sphericalangle TAN = 15° \quad \text{i} \quad \sphericalangle MAN = \sphericalangle MAT + \sphericalangle TAN = 30° + 15° = 45°.$$

Treće rješenje.

Neka je a duljina stranice kvadrata $ABCD$.

Budući da je ABM polovica jednakostraničnog trokuta vrijedi

$$|AB| = |BM|\sqrt{3}, \quad \text{tj.} \quad |BM| = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$ 1 bod

Budući da je i MCN polovica jednakostraničnog trokuta vrijedi

$$|CM| = |BC| - |BM| = a - \frac{a}{\sqrt{3}} \quad \text{i} \quad |CN| = |CM|\sqrt{3} = a\sqrt{3} - a.$$

Konačno, zaključujemo da je

$$|DN| = |CD| - |CN| = 2a - a\sqrt{3}.$$ 1 bod

Neka je točka E na dužini $\overline{AM}$ takva da je $|AE| = |AB|$. 1 bod

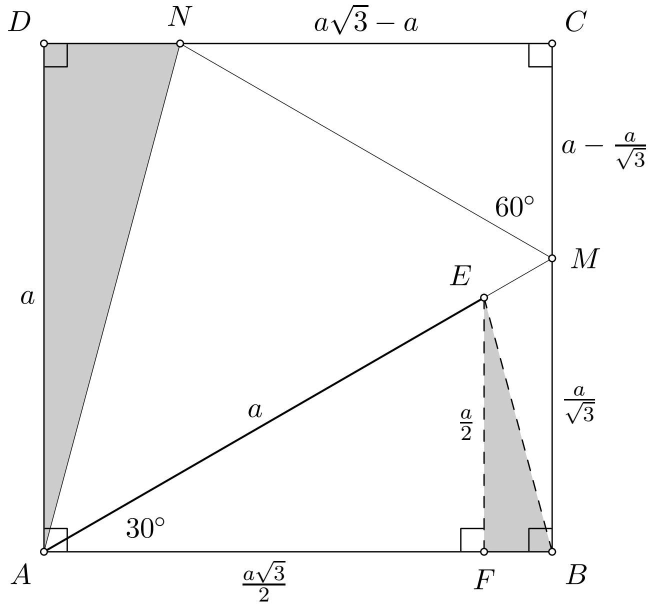
Budući da je $\sphericalangle AMB = 60°$ i $\sphericalangle BAM = 30°$, u jednakokračnom trokutu ABE vrijedi

$$\sphericalangle ABE = \frac{180° - \sphericalangle BAE}{2} = 75°.$$ 1 bod

Neka je točka F nožište visine iz točke E na stranicu $\overline{AB}$.

Budući da je $\sphericalangle EAF = 30°$, trokut AFE je polovica jednakostraničnog trokuta i vrijedi

$$|EF| = \frac{a}{2} \quad \text{i} \quad |AF| = |EF|\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$ 1 bod



Slijedi da je

$$|FB| = |AB| - |AF| = a - \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Budući da je $|AD| = a = 2 \cdot |EF|$ i $|DN| = a(2-\sqrt{3}) = 2 \cdot |FB|$, zaključujemo da su pravokutni trokuti AND i EBF slični. 3 boda

Zato je $\sphericalangle AND = 75°$. Sada zaključujemo da je

$$\sphericalangle MAN = \sphericalangle BAN - \sphericalangle BAM = \sphericalangle AND - \sphericalangle BAM = 75° - 30° = 45°.$$ 2 boda

Četvrto rješenje.

Neka je a duljina stranice kvadrata $ABCD$.

Budući da je ABM polovica jednakostraničnog trokuta vrijedi

$$|AB| = |BM|\sqrt{3}, \quad \text{tj.} \quad |BM| = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$ 1 bod

Budući da je i MCN polovica jednakostraničnog trokuta vrijedi

$$|CM| = |BC| - |BM| = a - \frac{a}{\sqrt{3}} \quad \text{i} \quad |CN| = |CM|\sqrt{3} = a\sqrt{3} - a.$$

Konačno, zaključujemo da je $|DN| = |CD| - |CN| = 2a - a\sqrt{3}$. 1 bod

Neka je točka P na stranici $\overline{AD}$ takva da je $\sphericalangle DNP = 60°$, tj. da je DNP polovica jednakostraničnog trokuta. 2 boda

Tada je $|DP| = |DN| \cdot \sqrt{3} = 2a\sqrt{3} - 3a$ 1 bod

i $|NP| = 2|DN| = 4a - 2a\sqrt{3}$. 1 bod

Nadalje, $|AP| = |AD| - |DP| = a - (2a\sqrt{3} - 3a) = 4a - 2a\sqrt{3}$. 1 bod

Dakle, $|NP| = |AP|$. 1 bod

Budući da je $\sphericalangle NPD = 30°$, tj. $\sphericalangle NPA = 150°$, slijedi da je

$$\sphericalangle NAP = 15°.$$ 1 bod

Zaključujemo da je

$$\sphericalangle MAN = \sphericalangle MAD - \sphericalangle NAP = 60° - 15° = 45°.$$ 1 bod

Zadatak A-1.5.

Karlo i Lovro igraju sljedeću igru. Karlo će razrezati papir dimenzija 9×9 na pravokutnike cjelobrojnih dimenzija kojima je barem jedna dimenzija 1. Nakon toga će Lovro odabrati prirodni broj $k \in \{1, \ldots, 9\}$ i Karlo će mu dati onoliko novčića koliko iznosi ukupna površina svih pravokutnika dimenzija $1 \times k$ i $k \times 1$. Lovro će odabrati k tako da od Karla dobije što više novčića, a Karlo bi želio uštedjeti i pritom dati Lovri što manje novčića.

Odredi najmanji mogući broj novčića koje će Karlo dati Lovri.

Rješenje.

Tvrdimo da će Karlo dati Lovri najmanje 12 novčića. 1 bod

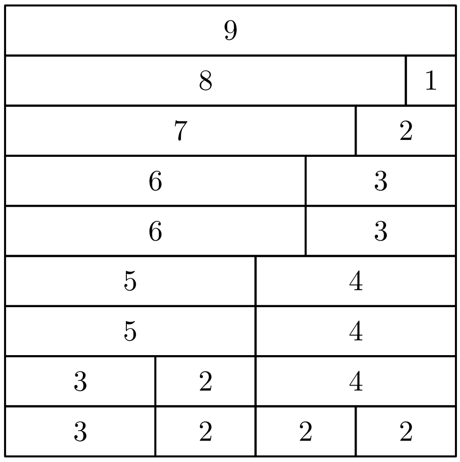
Pretpostavimo da postoji način da Karlo razreže papir tako da Lovri mora dati (strogo) manje od 12 novčića. Tim načinom rezanja Karlo bi napravio najviše 11 pravokutnika dimenzija 1×1, pet pravokutnika dimenzija 1×2, tri pravokutnika dimenzija 1×3, dva pravokutnika dimenzija 1×4, dva pravokutnika dimenzija 1×5, te po jedan pravokutnik dimenzija 1×6, 1×7, 1×8 i 1×9. 3 boda

Svi ti pravokutnici zajedno bi imali površinu

$$11 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 78.$$ 1 bod

Budući da je $78 < 81$, Karlo bi uz sve te pravokutnike morao napraviti još barem jedan pravokutnik kako bi iskoristio čitav papir dimenzija 9×9. Zato je nemoguće da Karlo da Lovri manje od 12 novčića. 2 boda

Sljedeći primjer pokazuje da Karlo može razrezati papir tako da bude siguran da će Lovri trebati dati najviše 12 novčića.



3 boda

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

2. razred – srednja škola – A varijanta

28. veljače 2017.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-2.1.

Neka je p prost broj. Odredi sve parove (a, b) cijelih brojeva za koje vrijedi

$$p(a-2)=a(b-1).$$

Prvo rješenje.

Ako je $a=0$, onda je $p=0$ što nije moguće.

Ako je $a \neq 0$, vidimo da a dijeli $p(a-2)=pa-2p$, tj. a dijeli $2p$. 4 boda

Imamo sljedeće mogućnosti: $a \in \{\pm 1, \pm 2, \pm p, \pm 2p\}$. 2 boda

Traženi parovi (a, b) su

$$\begin{array}{llll} (1,1-p), & (2,1), & (p, p-1), & (2p, p), \\ (-1,1+3p), & (-2,1+2p), & (-p, p+3), & (-2p, p+2). \end{array}$$ 4 boda

Napomena: Ako je $p>2$, onda je broj rješenja 8, dok je za $p=2$ broj rješenja 6 (neka se rješenja podudaraju).

Napomena: Ako učenik napiše sva rješenja u kojima su a i b pozitivni cijeli brojevi, ali ne i ona rješenja u kojima je neki od brojeva negativan, treba dobiti 8 bodova.

Drugo rješenje.

Budući da je p prost slijedi da p dijeli a ili p dijeli $b-1$. 2 boda

Ako p dijeli a, neka je $a=pk$ za neki cijeli broj k. Tada je

$$p(pk-2)=pk(b-1), \quad \text{tj.} \quad pk-2=k(b-1).$$

Slijedi da k dijeli 2, pa je $k=\pm 1$ ili $k=\pm 2$. 2 boda

Dobivamo sljedeća rješenja (a, b):

$$(p, p-1),\ (-p, p+3),\ (-2p, p+1),\ (2p, p).$$ 2 boda

Ako p dijeli $b-1$, neka je $b=p\ell+1$ za neki cijeli broj ℓ. Tada je

$$p(a-2)=ap\ell, \quad \text{tj.} \quad a-2=a\ell.$$

Slijedi da a dijeli 2, pa je $a = \pm 1$ ili $a \pm 2$. 2 boda

Dobivamo sljedeća rješenja (a, b):

$$(1, 1-p),\ (-1, 1+3p),\ (2, 1),\ (-2, 1+2p). \qquad \text{2 boda}$$

Zadatak A-2.2.

Odredi sve kompleksne brojeve z za koje je omjer imaginarnog dijela pete potencije broja z i pete potencije imaginarnog dijela broja z najmanji mogući.

Rješenje.

Zapišimo $z = a + bi$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$ i $b \neq 0$. Tada je

$$\operatorname{Im} z^5 = \operatorname{Im}(a^5 + 5a^4bi - 10a^3b^2 - 10a^2b^3i + 5ab^4 + b^5i) = 5a^4b - 10a^2b^3 + b^5. \qquad \text{3 boda}$$

Želimo minimizirati sljedeći izraz

$$\frac{\operatorname{Im} z^5}{(\operatorname{Im} z)^5} = \frac{5a^4b - 10a^2b^3 + b^5}{b^5} = 5\frac{a^4}{b^4} - 10\frac{a^2}{b^2} + 1.$$

Uvedimo zamjenu $x = \dfrac{a^2}{b^2}$. Tražimo najmanju vrijednost koju poprima kvadratna funkcija $f\colon [0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 5x^2 - 10x + 1. \qquad \text{3 boda}$$

Budući da je $5x^2 - 10x + 1 = 5(x-1)^2 - 4$, tražena najmanja vrijednost je -4 i postiže se za $x = 1$. 3 boda

Traženi brojevi su svi brojevi oblika $z = a(1 \pm i)$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. 1 bod

Zadatak A-2.3.

Odredi sve trojke (x, y, z) pozitivnih realnih brojeva koje zadovoljavaju sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} 3\lfloor x \rfloor - \{y\} + \{z\} &= 20.3 \\ 3\lfloor y \rfloor + 5\lfloor z \rfloor - \{x\} &= 15.1 \\ \{y\} + \{z\} &= 0.9. \end{aligned}$$

Za realni broj t, $\lfloor t \rfloor$ označava najveći cijeli broj koji je manji ili jednak t, a $\{t\}$ njegov decimalni dio, tj. $\{t\} = t - \lfloor t \rfloor$. Npr. ako je $t = 15.1$, onda je $\lfloor t \rfloor = 15$ i $\{t\} = 0.1$.

Rješenje.

Zbrajanjem prve i treće jednadžbe dobivamo

$$3\lfloor x\rfloor + 2\{z\} = 21.2.$$ 2 boda

Imamo dvije mogućnosti $\{z\} = 0.1$ i $\{z\} = 0.6$. 1 bod

No, samo za $\{z\} = 0.1$ je $\lfloor x\rfloor$ cijeli broj. Dakle, mora vrijediti $\{z\} = 0.1$ i $\lfloor x\rfloor = 7$. 2 boda

Iz treće jednadžbe slijedi $\{y\} = 0.8$. 1 bod

Iz druge jednadžbe vidimo da mora vrijediti $\{x\} = 0.9$. 1 bod

Također vrijedi

$$3\lfloor y\rfloor + 5\lfloor z\rfloor = 16.$$

Budući da su y i z pozitivni, jedina mogućnost je $\lfloor y\rfloor = 2$ i $\lfloor z\rfloor = 2$. 2 boda

Sustav ima samo jedno rješenje $x = 7.9$, $y = 2.8$, $z = 2.1$. 1 bod

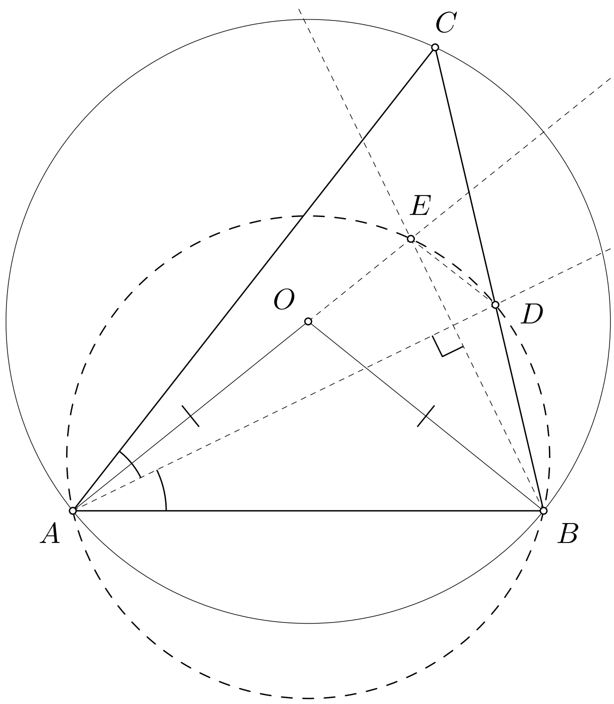
Zadatak A-2.4.

Dan je šiljastokutan trokut ABC u kojem vrijedi $|AC| > |AB|$, a točka O je središte opisane kružnice. Simetrala kuta $\sphericalangle CAB$ siječe stranicu $\overline{BC}$ u točki D. Pravac okomit na pravac AD koji prolazi kroz točku B siječe pravac AO u točki E.

Dokaži da točke A, B, D i E leže na istoj kružnici.

Prvo rješenje.

Neka su α, β i γ mjere kutova u trokutu ABC kod vrhova A, B i C, redom.



Budući da je O središte opisane kružnice trokuta ABC, trokut AOB je jednakokračan i vrijedi $\sphericalangle AOB = 2\gamma$. Slijedi da je $\sphericalangle EAB = \sphericalangle OAB = 90° - \gamma$. 2 boda

Kako je $\sphericalangle DAB = \frac{\alpha}{2}$ vrijedi

$$\sphericalangle EAD = 90^\circ - \gamma - \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta - \gamma}{2}.$$ 3 boda

Vrijedi $\sphericalangle ABE = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, iz čega slijedi

$$\sphericalangle EBD = \sphericalangle ABC - \sphericalangle ABE = \beta - 90^\circ + \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta - \gamma}{2}.$$ 3 boda

Budući da je $\sphericalangle EAD = \sphericalangle EBD$, slijedi da je $ABDE$ tetivan četverokut. 2 boda

Drugo rješenje.

Neka su α, β i γ mjere kutova u trokutu ABC kod vrhova A, B i C, redom.

Budući da je O središte opisane kružnice trokuta ABC, trokut AOB je jednakokračan i vrijedi $\sphericalangle AOB = 2\gamma$. Slijedi da je $\sphericalangle EAB = \sphericalangle OAB = 90^\circ - \gamma$. 2 boda

Kako je $\sphericalangle DAB = \frac{\alpha}{2}$, onda je $\sphericalangle ABE = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ i vrijedi

$$\sphericalangle AEB = 180^\circ - \sphericalangle BAE - \sphericalangle ABE = 180^\circ - (90^\circ - \gamma) - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha}{2} + \gamma.$$ 3 boda

Također, vrijedi

$$\sphericalangle ADB = 180^\circ - \sphericalangle BAD - \sphericalangle ABD = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \beta = \frac{\alpha}{2} + \gamma.$$ 3 boda

Budući da je $\sphericalangle AEB = \sphericalangle ADB$, slijedi da je $ABDE$ tetivan četverokut. 2 boda

Zadatak A-2.5.

Koliko najviše elemenata može imati podskup skupa $\{1, 2, 3, \ldots, 2017\}$ tako da za svaka dva elementa a i b tog podskupa broj $a + b$ nije djeljiv brojem $a - b$?

Rješenje.

Tvrdimo da je odgovor 673. 1 bod

U podskupu ne smijemo imati uzastopne elemente a i $b = a + 1$ jer 1 dijeli $a + b$. 1 bod

U podskupu ne smijemo imati a i $b = a + 2$ jer 2 dijeli $a + b = 2a + 2$. 1 bod

Dakle, među tri uzastopna broja u podskupu se može nalaziti najviše jedan. Zato podskup s traženim svojstvom može imati najviše 673 elemenata. 4 boda

Podskup $A = \{1, 4, 7, \ldots, 2014, 2017\}$ koji se sastoji od brojeva koji daju ostatak 1 pri dijeljenju s 3 ima 673 elemenata. 1 bod

Za bilo koja dva elementa $a, b \in A$ broj $a - b$ je djeljiv s 3, a broj $a + b$ daje ostatak 2, pa $a - b$ ne dijeli $a + b$. 2 boda

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

3. razred – srednja škola – A varijanta

28. veljače 2017.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-3.1.

U trokutu ABC simetrala kuta kod vrha C siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki D. Neka su a i b redom duljine stranica $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$, redom. Ako vrijedi $|CD| = \dfrac{ab}{a+b}$, odredi $\sphericalangle ACB$.

Prvo rješenje.

Neka su α, β i γ mjere kutova u trokutu ABC kod vrhova A, B i C, redom.

Neka je $n = |AD|$, $m = |BD|$ i $|AB| = c$. Prema poučku o simetrali kuta vrijedi $m : n = a : b$. Budući da je $m + n = c$, vrijedi

$$m = \frac{ac}{a+b}.$$ 2 boda

Prema poučku o kosinusu primijenjenom na trokut BCD vrijedi

$$\frac{a^2b^2}{(a+b)^2} = a^2 + \frac{a^2c^2}{(a+b)^2} - \frac{2a^2c}{a+b}\cos\beta,$$ 1 bod

tj.

$$\cos\beta = \frac{(a+b)^2 + c^2 - b^2}{2c(a+b)} = \frac{a^2 + 2ab + c^2}{2c(a+b)}.$$ 2 boda

Budući da prema poučku o kosinusu primijenjenom na trokut ABC vrijedi

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

slijedi

$$\frac{a^2 + 2ab + c^2}{2c(a+b)} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$ 2 boda

Sređivanjem dobivamo $a^2 + b^2 + ab = c^2$. 1 bod

Prema poučku o kosinusu primijenjenom na trokut ABC slijedi

$$\cos\gamma = -\frac{1}{2},$$ 1 bod

tj. $\gamma = 120°$. 1 bod

Napomena: U ovom rješenju smo koristili poučak o kosinusu na trokute ABC i BCD, na isti način kako se može dokazati Stewartov poučak. Zato zadatak možemo riješiti i na sljedeći način.

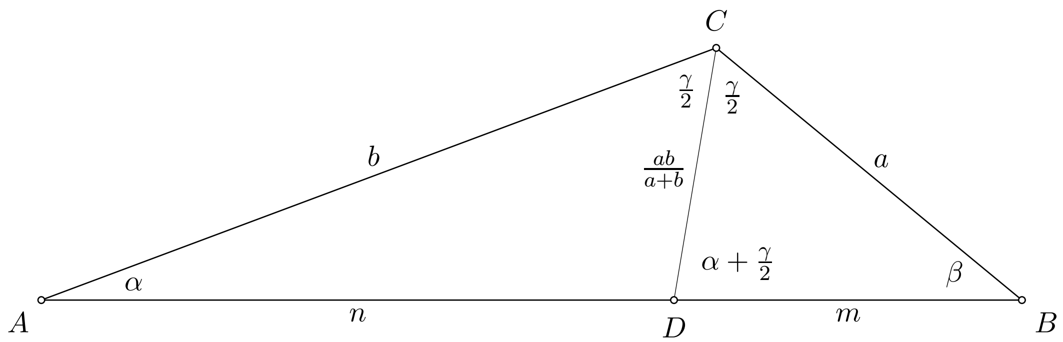
Nakon što pokažemo da je $m = \dfrac{ac}{a+b}$ i $n = \dfrac{bc}{a+b}$ (2 boda), uz $d = \dfrac{ab}{a+b}$, direktno iz Stewartove formule

$$b^2m + a^2n = c(d^2 + mn) \quad \text{(3 boda)}$$

dobivamo $a^2 + b^2 + ab = c^2$ (3 boda) i $\gamma = 120°$ (2 boda).

Drugo rješenje.

Neka su α, β i γ mjere kutova u trokutu ABC kod vrhova A, B i C, redom.



Vrijedi $\sphericalangle BDC = \alpha + \dfrac{\gamma}{2}$. Prema poučku o sinusima primijenjenom na trokut BCD vrijedi

$$\frac{ab}{a+b} : a = \sin\beta : \sin(\alpha + \frac{\gamma}{2}), \quad \text{tj.} \quad \frac{b}{a+b} = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha + \frac{\gamma}{2})}.$$ 3 boda

Vrijedi

$$\frac{a+b}{b} = \frac{a}{b} + 1 = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + 1.$$

Dobivamo

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + 1 = \frac{\sin(\alpha + \frac{\gamma}{2})}{\sin\beta}, \quad \text{tj.} \quad \sin\alpha + \sin\beta = \sin(\alpha + \frac{\gamma}{2}).$$ 2 boda

Budući da je $\sin\beta = \sin(180° - \beta) = \sin(\alpha + \gamma)$, slijedi

$$\sin(\alpha + \frac{\gamma}{2}) = \sin\alpha + \sin(\alpha + \gamma) = 2\sin(\alpha + \frac{\gamma}{2}) \cdot \cos\frac{\gamma}{2}.$$ 3 boda

Nije moguće $\sin(\alpha + \frac{\gamma}{2}) = 0$ (jer bi tada bilo $\alpha + \frac{\gamma}{2} = 180°$), pa je $\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}$. 1 bod

Dakle, $\gamma = 120°$. 1 bod

Treće rješenje.

Neka su α, β i γ mjere kutova u trokutu ABC kod vrhova A, B i C, redom.

Neka je $n = |AD|$, $m = |BD|$ i $|AB| = c$. Koristeći poučak o simetrali kuta (ili poučak o sinusima za trokute BCD i ADC) zaključujemo $a : b = m : n$.

Budući da je $m + n = c$, vrijedi

$$m = \frac{ac}{a+b}.$$ 2 boda

Prema poučku o sinusima za trokut BCD slijedi

$$\sin\frac{\gamma}{2} : \sin\beta = \frac{ac}{a+c} : \frac{ab}{a+b} = \frac{c}{b}.$$ 4 boda

Prema poučku o sinusima za trokut ABC vrijedi

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$

iz čega zaključujemo

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\beta},$$ 2 boda

tj.

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

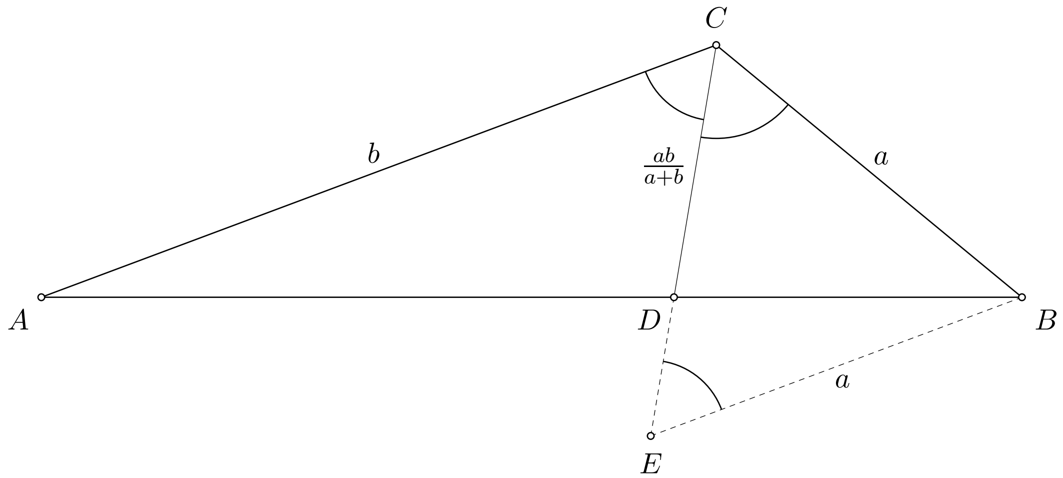
Nemoguće je $\sin\frac{\gamma}{2} = 0$ jer bi tada bilo $\gamma = 0$, pa je $\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}$. 1 bod

Dakle, $\gamma = 120°$. 1 bod

Četvrto rješenje.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $|BC| < |AC|$. Neka je točka E na simetrali kuta $\sphericalangle ACB$ takva da je $BE \parallel AC$. 2 boda

Uočimo da je $\sphericalangle BED = \sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD$, pa je $|BE| = |BC| = a$. 2 boda



Također, trokuti ADC i BDE imaju iste kutove, pa su slični. Iz te sličnosti slijedi $|BE| : |DE| = |AC| : |CD|$, tj.

$$|DE| = \frac{a}{b} \cdot |CD| = \frac{a^2}{a+b}.$$ 2 boda

Sada zaključujemo

$$|CE| = |CD| + |DE| = \frac{ab}{a+b} + \frac{a^2}{a+b} = a.$$ 2 boda

Dakle, trokut BCE jednakostraničan trokut. 1 bod

Zato je $\frac{1}{2}\sphericalangle ACB = 60°$, tj.

$$\sphericalangle ACB = 120°.$$ 1 bod

Zadatak A-3.2.

Postoji li prirodni broj m takav da 7 dijeli $2^{m^2} - 4$?

Rješenje.

Ostatci pri dijeljenju potencija broja 2 sa 7 se ponavljaju periodično: $2, 4, 1, 2, 4, 1, \ldots$

Vidimo da je $2^k - 4$ djeljivo s 4 ako i samo ako k daje ostatak 2 pri dijeljenju s 3. 4 boda

Kvadrati prirodnih brojeva su ili djeljivi s 3 ili daju ostatak 1 pri dijeljenju s 3. 2 boda

Ne postoji prirodni broj m takav da 7 dijeli $2^{m^2} - 4$ jer bi m^2 morao biti prirodni broj koji daje ostatak 2 pri dijeljenju s 3 što nije moguće. 4 boda

Zadatak A-3.3.

Izračunaj umnožak $\quad (1 + \operatorname{tg} 1°)(1 + \operatorname{tg} 2°) \ldots (1 + \operatorname{tg} 45°)$.

Rješenje.

Iz adicijske formule za tangens je $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)(1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta) = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$.

Ako je $\alpha + \beta = 45°$, onda je $1 = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$. 2 boda

Tako je

$$(1 + \operatorname{tg}\alpha)(1 + \operatorname{tg}(45° - \alpha)) = 1 + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(45° - \alpha) + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(45° - \alpha) = 2$$

za $\alpha = 1°, 2°, \ldots, 44°$. 5 bodova

U traženom umnošku prve 44 zagrade grupiramo u 22 para, pri čemu je umnožak po dvije zagrade u paru jednak 2. 2 boda

Iznos zadnje zagrade je također 2, pa je traženi umnožak jednak 2^{23}. 1 bod

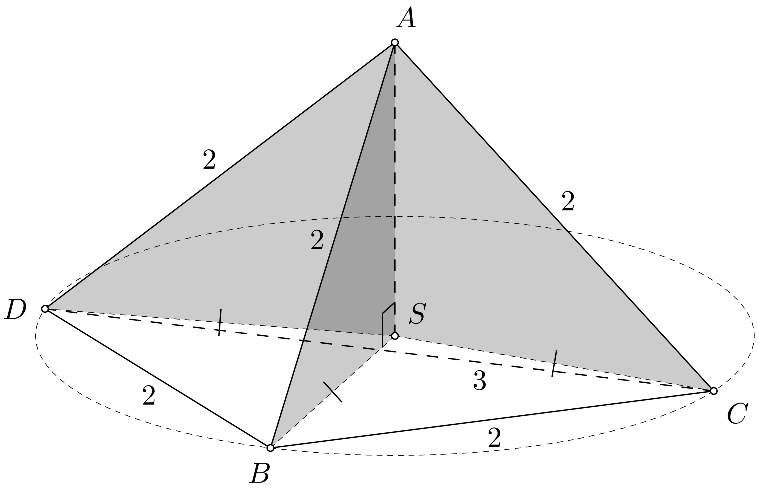
Zadatak A-3.4.

Dan je tetraedar kojem je jedan brid duljine 3, a svi ostali duljine 2.

Odredi obujam tog tetraedra.

Prvo rješenje.

Neka je $ABCD$ zadani tetraedar i neka je $|CD| = 3$. Promatramo tetraedar kao trostranu piramidu kojoj je baza jednakokračni trokut BCD.



Površinu trokuta BCD možemo odrediti koristeći Heronovu formulu. Duljine stranica tog trokuta su $a = 2$, $b = 2$ i $c = 3$, pa je poluopseg $s = \frac{7}{2}$. Površina iznosi

$$P(BCD) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{\frac{7}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{4}\sqrt{7}.$$ 2 boda

Neka je S nožište visine iz vrha A na bazu BCD. Trokuti ASB, ASC i ASD su pravokutni trokuti koji imaju zajedničku katetu i hipotenuze su im jednake duljine ($|AB| = |AC| = |AD| = 2$), pa korištenjem Pitagorinog poučka zaključujemo da je

$$|BS| = |CS| = |DS|.$$ 3 boda

Dakle, S je središte opisane kružnice trokuta BCD.

Polumjer opisane kružnice trokuta BCD možemo izračunati koristeći formulu

$$|BS| = R = \frac{abc}{4P} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{3\sqrt{7}} = \frac{4}{\sqrt{7}}.$$ 2 boda

Duljinu visine piramide $\overline{AS}$ računamo koristeći Pitagorin poučak

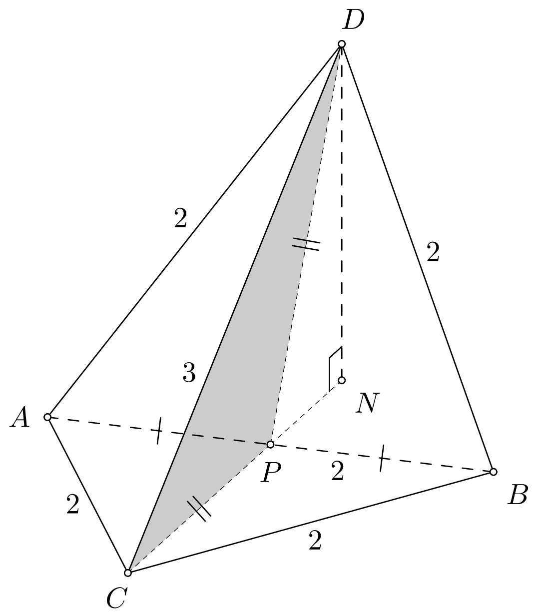
$$|AS|^2 = |AB|^2 - |BS|^2 = 4 - \frac{16}{7} = \frac{12}{7}, \quad \text{tj.} \quad |AS| = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$ 2 boda

Konačno, obujam traženog tetraedra iznosi

$$V = \frac{1}{3} \cdot P(BCD) \cdot |AS| = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \sqrt{7} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$ 1 bod

Drugo rješenje.

Neka je $ABCD$ zadani tetraedar i neka je $|CD| = 3$. Promatramo tetraedar kao trostranu piramidu kojoj je baza jednakostranični trokut ABC.



Površina trokuta ABC iznosi $P(ABC) = \dfrac{2^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$. 1 bod

Neka je P polovište brida $\overline{AB}$. Trokuti ABD i ABC su jednakostranični, pa vrijedi

$$|PC| = |PD| = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$ 1 bod

Neka je N nožište visine iz vrha D na bazu ABC. Kako je $|AD| = |BD|$, točka N leži na pravcu PC. 2 boda

Dakle, $\overline{DN}$ je visina u jednakokračnom trokutu CDP kojem su duljine stranica $\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ i 3. Koristeći Heronovu formulu (ili računanjem duljine visine iz točke P na stranicu $\overline{CD}$ koristeći Pitagorin poučak) možemo izračunati površinu tog trokuta

$$P(CDP) = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$ 2 boda

Budući da je

$$P(CDP) = \frac{|DN| \cdot |PC|}{2},$$

slijedi da je

$$|DN| = \frac{3}{2}.$$ 3 boda

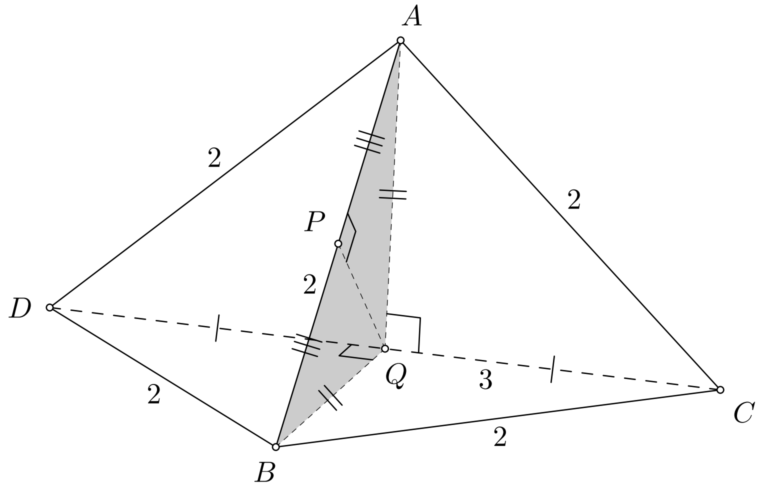
Obujam traženog tetraedra je

$$V(ABCD) = \frac{1}{3} \cdot P(ABC) \cdot |DN| = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$ 1 bod

Treće rješenje.

Neka je $ABCD$ zadani tetraedar i neka je $|CD| = 3$.

Neka je Q polovište brida $\overline{CD}$. Uočimo da su $\overline{AQ}$ i $\overline{BQ}$ visine u trokutima ACD i BCD, pa je pravac CD okomit na ravninu ABQ. 3 boda



Zato je traženi volumen

$$V(ABCD) = 2 \cdot V(ABCQ) = \frac{2}{3} \cdot P(ABQ) \cdot |QC|.$$ 3 boda

Trokut ACQ je pravokutan i znamo da je $|CQ| = \frac{3}{2}$ i $|AC| = 2$. Prema Pitagorinom poučku slijedi

$$|AQ|^2 = |AC|^2 - |CQ|^2 = 2^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}, \quad \text{tj.} \quad |AQ| = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$ 1 bod

Trokut ABQ je jednakokračan. Neka je P polovište brida $\overline{AB}$. Koristeći Pitagorin poučak za pravokutni trokut APQ dobivamo

$$|PQ|^2 = |AQ|^2 - |AP|^2 = \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 - 1^2 = \frac{3}{4}, \quad \text{tj.} \quad |PQ| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$ 1 bod

Slijedi da je $P(ABC) = \frac{1}{2} \cdot |PQ| \cdot |AB| = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, te konačno

$$V(ABCD) = \frac{2}{3} \cdot P(ABQ) \cdot |QC| = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$ 2 boda

Zadatak A-3.5.

Koliko najviše cijelih brojeva može sadržavati konačni skup S takav da među svaka tri elementa skupa S postoje dva različita broja čiji zbroj je također u S?

Rješenje.

Neka je S konačan skup cijelih brojeva takav da među svaka tri elementa skupa S postoje dva različita broja čiji zbroj je također u S. Pokazat ćemo da S ne može imati više od 7 elemenata.

Pretpostavimo da S ima barem tri pozitivna elementa. Neka su $a < b < c$ *najveća* tri elementa skupa S. Budući da je $a + c > c$ i $b + c > c$, mora vrijediti $a + b \in S$. Budući da je $a + b > b$ i $a + b \in S$, mora vrijediti $a + b = c$. 3 boda

Neka je x najveći element skupa S koji je manji od a. Promotrimo elemente x , b, c. Ako je $x > 0$, onda $x + c > c$ i $b + c > c$, pa mora vrijediti $x + b \in S$. Budući da je $x + b > b$, mora vrijediti $x + b = c = a + b$, tj. $a = x$, što nije moguće. Dakle, x ne može biti pozitivan, tj. S sadrži točno 3 pozitivna broja. 3 boda

Analogno pokazujemo implikaciju: ako S sadrži barem 3 negativna broja, onda S sadrži točno 3 negativna broja. Drugim riječima, skup S može sadržavati najviše 3 broja istog predznaka. Dakle, S može sadržavati najviše 7 elemenata (tri pozitivna, tri negativna i broj 0). 1 bod

Primjer skupa S sa 7 elemenata koji ima traženo svojstvo je

$$S = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}.$$ 3 boda

ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE

4. razred – srednja škola – A varijanta

28. veljače 2017.

AKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA ZADATKA, POVJERENSTVO JE DUŽNO I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

Zadatak A-4.1.

U prostoriji se nalazi sedam osoba. Četiri od njih poznaju točno po jednu osobu, a preostale tri osobe poznaju točno po dvije osobe. Sva poznanstva su uzajamna.

Kolika je vjerojatnost da se dvije slučajno odabrane osobe međusobno ne poznaju?

Prvo rješenje.

Ukupan broj uređenih parova osoba (A, B) je $7 \cdot 6 = 42$. 2 boda

Broj uređenih parova (A, B) osoba koje se poznaju je $4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 10$. 5 bodova

Vjerojatnost da se dvije slučajno odabrane osobe poznaju je $\frac{10}{42} = \frac{5}{21}$. 2 boda

Tražena vjerojatnost iznosi $1 - \frac{5}{21} = \frac{16}{21}$. 1 bod

Drugo rješenje.

Dvije osobe možemo odabrati na $\binom{7}{2} = 21$ načina. 2 boda

U svakom poznanstvu sudjeluju točno dvije osobe, a ukupan broj sudjelovanja osoba u poznanstvima je $4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 10$. Zato je ukupan broj poznanstava 5. 5 bodova

Broj parova osoba koje se ne poznaju je $21 - 5 = 16$. 1 bod

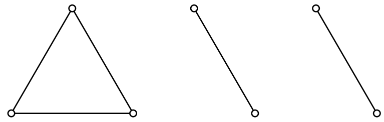
Tražena vjerojatnost iznosi $\frac{16}{21}$. 2 boda

Napomena: Rješenje možemo zapisati koristeći terminologiju iz teorije grafova. Osobe možemo reprezentirati kao vrhove grafa čiji stupnjevi su $2, 2, 2, 1, 1, 1, 1$. Budući da je zbroj stupnjeva vrhova jednak dvostrukom broju bridova, graf mora imati 5 bridova. Vjerojatnost da odaberemo par vrhova koji nisu spojeni bridom je $\frac{16}{21}$.

Treće rješenje.

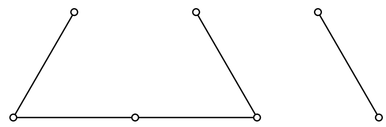
Razlikujemo tri slučaja.

i) Svaka osoba koja ima jednog poznanika poznaje osobu koja ima jednog poznanika. Tada su osobe koje imaju jednog poznanika grupirane u dva para, a trojka koja ima po dva poznanika čini treću grupu. Grafički tu situaciju možemo reprezentirati na sljedeći način:



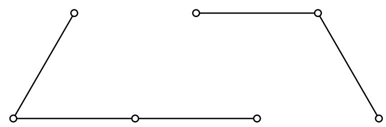
1 bod

ii) Od osoba koje imaju jednog poznanika dvije se međusobno poznaju, a dvije ne poznaju nijednu od preostalih tri osoba. Tada imamo jedan par osoba i jednu petorku osoba koje se poznaju. Grafički:



1 bod

iii) Nijedna osoba koja ima jednog poznanika ne poznaje osobu koja ima jednog poznanika. Tada imamo dvije grupe od po 3 i 4 osobe koje grafički možemo prikazati na sljedeći način:



1 bod

U svakom od slučajeva je broj poznanstava 5. 2 boda

Dvije osobe možemo odabrati na $\binom{7}{2} = 21$ načina. 2 boda

Broj parova osoba koje se ne poznaju je $21 - 5 = 16$. 1 bod

Tražena vjerojatnost iznosi $\frac{16}{21}$. 2 boda

Zadatak A-4.2.

Koliko ima prirodnih brojeva $c \leqslant 1\,000\,000$ koji se mogu prikazati u obliku

$$c = a^2 + 3b^2 - 4ab$$

za neke cijele brojeve a i b različite od 0?

Rješenje.

Uočimo da je izraz $a^2 + 3b^2 - 4ab$ paran ako i samo ako su a i b iste parnosti. Ako su a i b oba parni, onda je a^2 i b^2 djeljivo s 4 i izraz $a^2 + 3b^2 - 4ab$ je djeljiv s 4.

Ako su a i b oba neparni, onda a^2 i b^2 daju ostatak 1 pri dijeljenju s 4 i izraz a^2+3b^2-4ab je djeljiv s 4. To pokazuje da se parni brojevi koji nisu djeljivi s 4 ne mogu prikazati u traženom obliku. 3 boda

Takvih brojeva ima 250 000.

Koristeći faktorizaciju

$$a^2 + 3b^2 - 4ab = (a - 3b)(a - b)$$

dokazujemo da se brojevi 1 i 4 ne mogu prikazati u traženom obliku.

Ako je $(a - 3b)(a - b) = 1$, onda je $a - 3b = a - b = \pm 1$, tj. $b = 0$, što nije moguće. 1 bod

Ako je $(a - 3b)(a - b) = 4$, onda je $a - 3b = a - b = \pm 2$, tj. $b = 0$ ili je $a - 3b = \pm 1$ i $a - b = \pm 4$, tj. $2b = \pm 3$ ili je $a - 3b = \pm 4$ i $a - b = \pm 1$, tj. $2b = \mp 3$. Nijedan od tih slučajeva nije moguć. 1 bod

Svi ostali prirodni brojevi $c \leqslant 1\,000\,000$ se mogu prikazati u traženom obliku.

Naime, ako je $c = 2k+1$, $k \geqslant 1$, onda za $a = 3k+1$, $b = k$ dobivamo

$$a^2 + 3b^2 - 4ab = (a-3b)(a-b) = (3k+1-3k)(3k+1-k) = 2k+1.$$ 2 boda

Naime, ako je $c = 4k$, $k > 1$ onda za $a = 3k-1$, $b = k-1$ dobivamo

$$a^2 + 3b^2 - 4ab = (a-3b)(a-b) = (3k-1-3k+3)(3k-1-k+1) = 4k.$$ 2 boda

Ukupan broj brojeva koji se mogu prikazati u traženom obliku je

$$1\,000\,000 - 250\,000 - 2 = 749\,998.$$ 1 bod

Napomena: Učenik koji ne argumentira zašto se brojevi 1 i 4 ne mogu prikazati na traženi način treba dobiti najviše 8 bodova.

Zadatak A-4.3.

Dan je niz pozitivnih realnih brojeva $a_0, a_1, a_2, \ldots$ takvih da vrijedi

$$a_1 = 1 - a_0, \quad a_{n+1} = 1 - a_n(1-a_n) \text{ za } n \geqslant 1.$$

Dokaži da za svaki prirodni broj n vrijedi

$$a_0 a_1 \cdots a_n \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} \right) = 1.$$

Rješenje.

Tvrdnju dokazujemo matematičkom indukcijom po n. Za $n = 0$ vrijedi $a_0 \cdot \dfrac{1}{a_0} = 1$. 1 bod

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki cijeli broj $n \geqslant 0$. Tada je

$$\begin{aligned} a_0 \cdots a_{n+1} \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_{n+1}} \right) &= a_{n+1} \cdot a_0 \cdots a_n \left(\frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} \right) + a_0 \cdots a_n \\ &= \{\text{prema pretp. indukcije}\} = a_{n+1} + a_0 a_1 \cdots a_n. \end{aligned}$$ 2 boda

Možemo uočiti da će korak indukcije biti proveden ako dokažemo sljedeću pomoćnu tvrdnju: za svaki prirodni broj n vrijedi

$$a_n = 1 - a_0 a_1 \cdots a_{n-1}.$$ 3 boda

Pomoćnu tvrdnju također dokazujemo matematičkom indukcijom po n. Za $n = 1$ vrijedi $a_1 = 1 - a_0$ prema definiciji. 1 bod

Pretpostavimo da pomoćna tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj n. Tada je

$$a_{n+1} = 1 - a_n(1-a_n) = 1 - a_n \cdot a_0 a_1 \cdots a_{n-1} = 1 - a_0 a_1 \cdots a_n.$$ 3 boda

Prema principu matematičke indukcije slijedi pomoćna tvrdnja.

Time smo završili korak indukcije u dokazivanju tvrdnje zadatka.

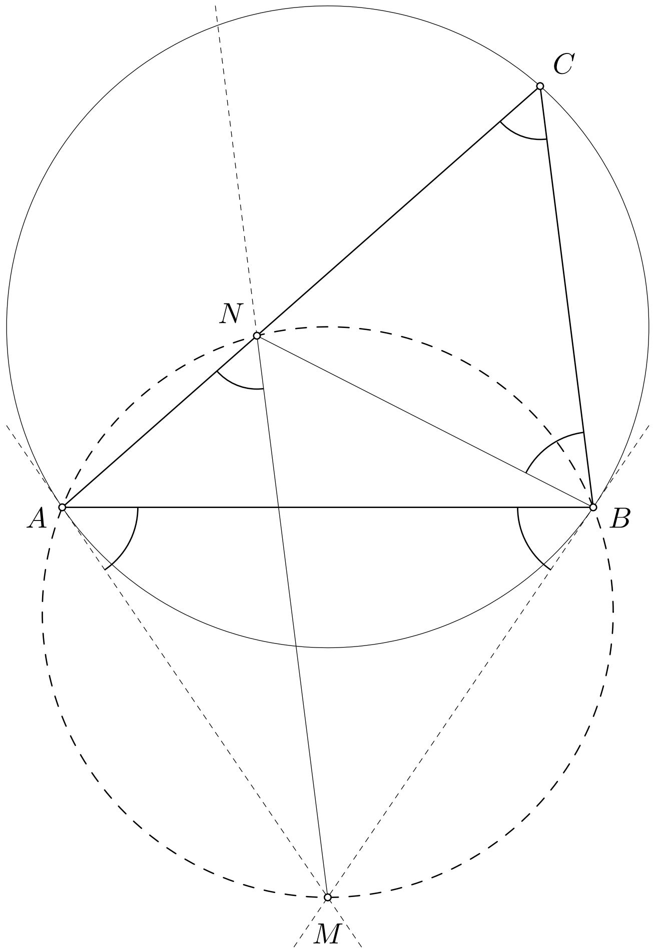
Dakle, prema principu matematičke indukcije vrijedi tvrdnja zadatka.

Zadatak A-4.4.

Dan je šiljastokutni trokut ABC. Tangente u točkama A i B na kružnicu opisanu tom trokutu sijeku se u točki M. Paralela sa stranicom $\overline{BC}$ kroz točku M siječe stranicu $\overline{CA}$ u točki N. Dokaži da je $|BN| = |CN|$.

Rješenje.

Neka su α, β i γ mjere kutova u trokutu ABC kod vrhova A, B i C, redom.



Prema poučku o kutu tetive i tangente je $\sphericalangle MBA = \gamma$. 2 boda

Budući da je $MN \parallel BC$, vrijedi $\sphericalangle MNA = \gamma$. 1 bod

Dakle, $\sphericalangle MNA = \sphericalangle MBA$, pa je $AMBN$ tetivan četverokut. 2 boda

Analogno, prema poučku o kutu tetive i tangente je $\sphericalangle MAB = \gamma$, 1 bod

pa je $\sphericalangle MAN = \gamma + \alpha$. Kako je $AMBN$ tetivan četverokut slijedi

$$\sphericalangle MBN = 180^\circ - \sphericalangle MAN = \beta.$$ 1 bod

Sada možemo uočiti da je $\sphericalangle MBN = \sphericalangle ABC$, pa oduzimanjem kuta $\sphericalangle ABN$ slijedi

$$\sphericalangle NBC = \sphericalangle ABM = \gamma.$$ 2 boda

Dakle, $\sphericalangle BCN = \sphericalangle NBC$ i $|BN| = |CN|$. 1 bod

Zadatak A-4.5.

Na kružnici je označeno 3000 točaka. U jednoj od tih točaka nalazi se skakavac. Skakavac svakim skokom preskače jednu ili dvije označene točke u smjeru kazaljke na satu i staje na sljedeću označenu točku. Odredi koliko je najmanje skokova skakavac napravio ako je na svaku označenu točku stao barem jednom i vratio se u točku iz koje je krenuo.

Rješenje.

Tvrdimo da je odgovor 3001 skokova. 1 bod

Označimo točke u smjeru kazaljke na satu brojevima $1, 2, \ldots, 3000$ krenuvši od točke u kojoj se skakavac nalazi na početku. Skakavac može stati na svaku točku barem jednom i vratiti se u točku iz koje je krenuo u 3001 skokova ovako:

$$1 \xrightarrow{3} 4 \xrightarrow{3} 7 \xrightarrow{3} \ldots \xrightarrow{3} 2998 \xrightarrow{2} 3000 \xrightarrow{3} 3 \xrightarrow{3} \ldots \xrightarrow{3} 2097 \xrightarrow{2} 2999 \xrightarrow{3} 2 \xrightarrow{3} \ldots \xrightarrow{3} 2999 \xrightarrow{2} 1.$$ 2 boda

Pokažimo da skakavac to ne može učiniti u manje skokova. Neka je k broj skokova duljine 2, a ℓ broj skokova duljine 3. Budući da se skakavac mora vratiti u točku iz koje je krenuo, tj. mora napraviti cijeli broj punih krugova, postoji prirodni broj n takav da je

$$2k + 3\ell = 3000n.$$ 2 boda

Budući da skakavac mora stati na svaku označenu točku barem jednom vrijedi

$$k + \ell \geqslant 3000.$$ 1 bod

Kada bi bi vrijedilo $k + \ell = 3000$, onda bi iz

$$3000n = 2k + 3\ell = 2(k + \ell) + \ell = 6000 + \ell$$

slijedilo da 3000 dijeli ℓ. Budući da je $k, \ell \geqslant 0$, moralo bi vrijediti $\ell = 0$ ili $\ell = 3000$. 2 boda

Slučaj $\ell = 0$ bi značio da su svi skokovi duljine 2, no tada skakavac ne bi stao na svaku označenu točku. Slučaj $\ell = 3000$ bi značio da su svi skokovi duljine 3 i tada skakavac također ne bi stao na svaku označenu točku.

Dakle, nije moguće $k + \ell = 3000$. 2 boda