Geometrijski trikovi i metode bez imena

Matija Bašić

lipanj 2016.

U ovom tekstu želimo na jednom mjestu navesti vrlo klasične ideje u rješavanju planimetrijskih zadataka. Primjeri variraju od jednostavnih do zadataka s HMO.

- **Precizno crtanje slike.** Vrlo bitna metoda koja vam može omogućiti da uočite da su neke točke kolinearne ili konciklične, što će vam dati ideju za rješenje.
- **Crtanje slike u fazama.** Ako je u zadatku mnogo kružnica i pravaca, nacrtajte samo jedan dio zadane konfiguracije i izvucite sve zaključke koje možete. Na primjer, nemojte crtati sve tri visine, već samo jednu. Nemojte zaboraviti širu sliku i što je potrebno dokazati.
- **Angle chasing.** Ovo je najpoznatija metoda u rješavanju planimetrijskih zadataka u kojima se pojavljuju tetivni četverokuti. Metoda se bazira na računanju kutova, te korištenju teorema o obodnom kutu, kutu tetive i tangente, uočavanju jednakokračnih trokuta i sličnim idejama.
- **Korištenje polovišta.** Ako se u zadatku pojavljuje polovište, razmišljajte možete li nacrtati/uočiti srednjicu kroz tu točku nekog trokuta, paralelogram kojem je ta točka sjecište dijagonala ili pravokutni trokut kojem je ta točka polovište hipotenuze.
- **Algebarski uvjeti.** Pojavljuje li se u zadatku neki algebarski uvjet, uvodimo novu točku na način da na jednom pravcu imamo dužine čije duljine su jednake onima koje se pojavljuju u izrazu. Na primjer, ako u trokutu ABC točka D leži na stranici $\overline{AB}$ tako da vrijedi $|BC| = |AD| + |AC|$, nacrtat ćemo točku E na produžetku stranice $\overline{AB}$ takvu da je $|AE| = |AC|$.
- **Fantomska točka.** U zadatku se pojavljuje točka T koja je definirana na jedan način. Potrebno je pokazati neka druga svojstva te točke, što nam nikako ne polazi za rukom na direktan način. Uvedemo točku T' koja ima svojstva koja želimo pokazati za točku T i pokažemo da točka T' zadovoljava svojstvo kojim je definirana točka T. Ako uvjeti na jedinstven način određuju točku T, možemo zaključiti da je točka $T = T'$, te smo time dokazali da točka T također ima svojstva koja ima i točka T'.
- **Konkurentnost.** Želite li pokazati da se krivulje (npr. pravci, kružnice) p, q i k sijeku u jednoj točki ili ako treba pokazati da se presjek krivulja p i q nalazi na krivulji k, promijenite perspektivu tako da uvedete presjek krivulja p i k te pokažete da leži na krivulji q. Ovo je poseban slučaj uvođenja fantomske točke.
- **Kolinearnost.** Želite li dokazati da točke A, B i C leže na jednom pravcu, uvedite točku D i pokažite da su A, B i D kolinearne, te A, C i D.

- **Karakteristična točka trokuta.** Želite li pokazati da je pravac koji prolazi točkom T okomica na stranicu (ili simetrala kuta) nekog trokuta, dokažite da je T ortocentar (ili središte upisane kružnice). Slično, ako želite pokazati da T dijeli neku dužinu u omjeru $2 : 1$, pokušajte prepoznati T kao težište trokuta kojem je ta dužina težišnica.

- **Simetrale kuta.** Unutarnja i vanjska simetrala kuta se sijeku pod pravim kutom. Ta dva pravca možete iskoristiti kao koordinatne osi pri uvođenju koordinatnog sustava.

- **Poznate točke na opisanoj kružnici.** Na opisanoj kružnici trokuta nalaze se sjecište simetrale kuta i simetrale nasuprotne stranice, osnosimetrična slika ortocentra obzirom na stranicu, centralnosimetrična slika ortocentra obzirom na polovište stranice.

- **Simetrija.** Naučite koristiti simetriju u kombinaciji s fantomskom točkom. Uz osnu i centralnu simetriju, naučite koristiti rotaciju u dokazivanju sukladnosti.

- **Dvije kružnice koje se diraju.** Ako se dvije kružnice diraju (ili to želite dokazati), koristite kut između tetive i tangente ili homotetiju koja prevodi jednu kružnicu u drugu.

- **Eulerov pravac i Eulerova kružnica.** Na kružnici 9 točaka (Eulerovoj kružnici) leže polovišta, nožišta visina i polovišta spojnica vrhova s ortocentrom trokuta. Na Eulerovom pravcu leže središte opisane kružnice, težište, središte kružnice 9 točaka i ortocentar.

  Ako je H ortocentar, O središte opisane kružnice, a P polovište stranice $\overline{BC}$ trokuta ABC, onda je $|AH| = 2|OP|$.

- **Radikalno središte.** Pokažite da se tri pravca sijeku u jednoj točki tako da uočite da su to radikalne osi za tri kružnice. Dokažite da su tri točke na istom pravcu jer su dvije presjeci dvije kružnice, a treća radikalno središte te dvije kružnice s nekom trećom kružnicom.

Primjeri

1. Dokažite da je četverokut $ABCD$ paralelogram ako i samo ako se njegove dijagonale raspolavljaju.

   Napomena: Koristite samo sukladnost i transverzale. Paralelogram definiramo kao četverokut koji ima dva para paralelnih nasuprotnih stranica.

2. Neka je P polovište stranice $\overline{AB}$ trokuta ABC. Neka pravac p kroz točku P siječe stranice $\overline{AC}$ u točki Q. Dokažite da je Q polovište stranice $\overline{AC}$ ako i samo ako su pravci p i BC paralelni.

   Napomena: Koristite prethodni zadatak. Nacrtajte paralelogram na svrhovit način.

3. Neka je $ABCD$ četverokut te K, L, M, N redom polovišta njegovih stranica. Dokažite da je $KLMN$ paralelogram.

   Napomena: Uočite srednjice.

4. Nad stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ trokuta ABC konstruirani su prema van kvadrati $ABDE$ i $BCKM$. Ako je P polovište dužine $\overline{AC}$, dokaži da je

$$|DM| = 2|BP|.$$

   Napomena: Nadopunite do paralelograma.

5. U trokutu ABC kut kod vrha A je dvostruko veći od kuta kod vrha B. Neka simetrala kuta kod vrha C siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki D. Dokaži da vrijedi

$$|BC| = |AD| + |AC|.$$

   Napomena: Dodajte točku tako da dobijete jednakokračan trokut.

6. U trokutu ABC vrijedi $|AB| = |AC|$, a simetrala kuta $\angle ABC$ siječe stranicu $\overline{AC}$ u točki D tako da je $|BC| = |BD| + |AD|$. Odredi kutove tog trokuta.

   Napomena: Uvedite točku E tako da dobijete jednakokračan trokut.

7. Neka je $ABCD$ tetivni četverokut u kojem vrijedi $|AD| = |AB| + |CD|$. Dokaži da se simetrale kutova $\angle ABC$ i $\angle BCD$ sijeku na dužini $\overline{AD}$.

   Napomena: Promotrite presjek simetrale kuta $\angle BCD$ i dužine $\overline{AD}$ i pokažite da leži na simetrali kuta $\angle ABC$. Uvedite točku na $\overline{AD}$ tako da dobijete dva jednakokračna trokuta.

8. Dokažite da se simetrala unutarnjeg kuta trokuta i simetrala nasuprotne stranice sijeku na opisanoj kružnici trokuta.

   Napomena: Promijenite perspektivu.

9. Neka su A_1, B_1, C_1 nožišta visina trokuta ABC. Dokažite da je ortocentar trokuta ABC središte kružnice upisane trokutu $A_1B_1C_1$.

   Napomena: Klasičan angle chasing.

10. Neka je H ortocentar, a $\overline{AA'}$ promjer opisane kružnice trokuta ABC. Ako je M polovište stranice $\overline{BC}$, dokaži da su točke A', M i H kolinearne.

    Napomena: Nužno je i dovoljno je pokazati da je $BA'CH$ paralelogram. Ovu tvrdnju se može iskoristiti u mnogim zadacima na natjecanjima (usp. županijsko 2015, 2.r. i IMO 2015, 6. zadatak)

11. Neka je $ABCDEF$ pravilni šesterokut sa središtem O. Neka su M i N polovišta stranica $\overline{CD}$ i $\overline{DE}$, a L točka presjeka pravaca AM i BN. Dokažite:

    - $P(ABL) = P(DMLN)$.
    - $\sphericalangle ALO = \sphericalangle OLN = 60°$.
    - $\sphericalangle OLD = 90°$.

    Napomena: Koristite rotaciju.

12. U pravilnom šesterokut $ABCDEF$ točka K je polovište dijagonale $\overline{BD}$, a točka L polovište stranice $\overline{EF}$. Dokažite da je trokut AKL jednakostraničan.

    Napomena: Koristite rotaciju.

13. Konveksni četverokut podijeljen je dijagonalama na četiri trokuta čije su upisane kružnice sukladne. Dokaži da je taj četverokut romb.

    Napomena: Uvedite fantomsku točku.

14. Neka je H ortocentar trokuta ABC. Dokažite da su kružnice opisane trokutima ABC, HBC, AHB i ABH međusobno sukladne.

    Napomena: Koristite simetriju i poznate činjenice o točkama na opisanoj kružnici.

15. Na stranici $\overline{AC}$ trokuta ABC nalaze se točke D i E tako da je točka D između C i E. Neka je F sjecište kružnice opisane trokutu ABD s pravcem koji prolazi kroz točku E i paralelan je s BC tako da se točke E i F nalaze s različitih strana pravca AB. Neka je G sjecište kružnice opisane trokutu BCD s pravcem koji prolazi kroz točku E i paralelan je s AB tako da se točke E i G nalaze s različitih strana pravca BC.

    Dokaži da točke D, E, F i G leže na istoj kružnici.

    Napomena: Na preciznoj skici uočite kolinearne točke. Uvedite fantomsku točku.

16. U trokutu ABC kut pri vrhu B iznosi $120°$. Neka su A_1, B_1, C_1 redom točke na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, takve da su AA_1, BB_1, CC_1 simetrale kutova trokuta ABC. Odredi kut $\sphericalangle A_1B_1C_1$.

    Napomena: Točka A_1 je središte pripisane kružnice trokuta ABB_1.

17. Na polukružnici s promjerom $\overline{AB}$ dane su točke K i L. Simetrala dužine $\overline{AB}$ siječe dužinu $\overline{KL}$ u točki U i pritom su točke A i K s jedne strane te simetrale, a B i L s druge. Neka je N nožište okomice iz sjecišta pravaca AK i BL na pravac AB, a V točka na pravcu KL takva da je $\sphericalangle VAU = \sphericalangle VBU$.

    Dokaži da su pravci NV i KL međusobno okomiti.

    Napomena: Uvedite polovište dužine $\overline{AB}$. Uočite radikalne osi i koristite potenciju točke.

Teži zadaci

1. (Timisoara, 1986) Neka je $ABCD$ tetivni četverokut i neka se pravci AB i CD sijeku u točki E. Točka F je centralno simetrična slika točke C obzirom na točku E. Dokaži da su pravci AF i BD okomiti ako i samo ako su pravci AB i CD okomiti.

2. (Češka, 2011) U šiljastokutnom trokutu ABC, koji nije jednakostraničan, točka P je nožište visine iz vrha C. Neka je H ortocentar tog trokuta, a O središte opisane kružnice. Neka je D presjek pravaca CO i AB, a E polovište dužine $\overline{CD}$. Dokaži da pravac EP prolazi kroz polovište dužine $\overline{OH}$.

3. (Kina, 2010) Neka je H ortocentar trokuta ABC, a D polovište stranice BC. Pravac kroz H siječe stranice AB i AC u točkama F i E redom tako da je $AE = AF$. Polupravac DH siječe opisanu kružnicu trokutu ABC u točki P. Dokaži da točke P, A, E, F leže na jednoj kružnici.

4. Neka je I središte, a D, E, F redom dirališta upisane kružnice sa stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ u trokutu ABC. Neka je M nožište okomice iz točke D na pravac EF. Neka je P polovište dužine $\overline{DM}$, a H ortocentar trokuta BIC. Dokaži da pravac PH raspolavlja dužinu $\overline{EF}$.

5. (Rusija, 2014) U trokutu ABC vrijedi $|AB| > |BC|$, a točke M i N nalaze se redom na $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, tako da je $|AM| = |CN|$. Pravci MN i AC sijeku se u K. Neka je P središte upisane kružnice trokuta AMK, Q središte pripisane kružnice trokuta CNK nasuprot vrha K. Dokaži da je polovište duljeg luka AC opisane kružnice trokuta ABC jednako udaljeno od točaka P i Q.

6. (SL 2010) Neka je $ABCDE$ konveksan peterokut takav da je $BC||AE$, $|AB| = |BC| + |AE|$ i $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDE$. Neka je M polovište dužine $\overline{CD}$ i neka je O središte opisane kružnice trokutu BCD. Ako je $\sphericalangle DMO = 90°$, dokaži da je $2\sphericalangle BDA = \sphericalangle CDE$.

7. (SL 2000) Neka je O središte upisane kružnice, a H ortocentar ššiljastokutnog trokuta ABC. Dokaži da postoje točke D, E, F na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ redom, tako da vrijedi

$$|OD| + |DH| = |OE| + |EH| = |OF| + |FH|$$

i da su pravci AD, BE i CF konkurentni.

8. (Rumunjska 60') Neka su C i D različite točke na polukružnici s promjerom $\overline{AB}$. Označimo s E, F i G polovišta dužina $\overline{AC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{DB}$, redom. Okomica iz E na AF siječe tangentu na polukružnicu kroz točku A u točki M, a okomica iz G na BF siječe tangentu na polukružnicu kroz točku B u točki N. Dokaži da su pravci MN i CD paralelni.

9. (SL 2000) Neka je $ABCD$ konveksan četverokut, pri čemu AB i CD nisu paralelni. Neka je točka X u unutrašnjosti $ABCD$ takva da je $\sphericalangle ADX = \sphericalangle BCX < 90°$ i $\sphericalangle DAX = \sphericalangle CBX < 90°$. Ako je točka Y presjek simetrala dužina AB i CD, dokaži da je $\sphericalangle AYB = 2\sphericalangle ADX$.

10. (SL 2002) Neka je Ω upisana kružnica šiljastokutnom trokutu ABC i neka pravac BC dira tu kružnicu u točki K. Neka je AD visina u trokutu ABC i neka je M polovište dužine $\overline{AD}$. Ako je N drugo sjecište kružnice Ω i pravca KM, dokaži da se Ω i kružnica opisana trokutu BCN diraju u N.

11. (SL 2011) Neka je Ω opisana kružnica šiljastokutnom trokutu ABC. Neka je B_0 polovište dužine $\overline{AC}$ i neka je C_0 polovište dužine $\overline{AB}$. Neka je D nožište visine iz A, te neka je G težište trokuta ABC. Neka je k kružnica koja prolazi kroz B_0 i C_0 i koja dira Ω u točki $X \neq A$. Dokaži da su točke D, G i X kolinearne.

12. Neka su točke M i N unutar trokuta ABC takve da je

$$\sphericalangle MAB = \sphericalangle NAC \quad \text{i} \quad \sphericalangle MBA = \sphericalangle NBC.$$

Dokaži

$$\frac{|AM||AN|}{|AB||AC|} + \frac{|BM||BN|}{|BA||BC|} + \frac{|CM||CN|}{|CA||CB|} = 1$$

13. (SL 2004) Neka je $ABCD$ tetivan četverokut. Pravci AD i BC se sijeku u točki E, pri čemu je C između B i E. Dijagonale AC i BD se sijeku u točki F. Neka je M polovište stranice $\overline{CD}$, te neka je $N \neq M$ točka na opisanoj kružnici trokuta ABM takva da je

$$\frac{|AN|}{|BN|} = \frac{|AM|}{|BM|}.$$

Dokaži da su točke E, F i N kolinearne.

14. (SL 2002) Neka se kružnice K_1 i K_2 sijeku u točkama A i B. Pravac kroz točku A siječe K_1 u točki C i K_2 u točki D. Točke M, N i K leže na dužinama $\overline{CD}$, $\overline{BC}$ i $\overline{BD}$, redom, tako da je pravac MN paralelan pravcu BD, a MK paralelan pravcu BC. Neka su točke E i F redom na lukovima BC kružnice K_1 i BD kružnice K_2 koji ne sadrže A. Ako je pravac EN okomit na BC i FK okomit na BD, dokaži da je $\sphericalangle EMF = 90°$.

15. (SL 2014) Neka su Ω i O opisana kružnica i središte opisane kružnice šiljastokutnom trokutu ABC uz $|AB| > |BC|$. Simetrala kuta $\sphericalangle ABC$ siječe Ω u točki $M \neq B$. Neka je Γ kružnica s promjerom $\overline{BM}$. Simetrale kutova $\sphericalangle AOB$ i $\sphericalangle BOC$ sijeku Γ u točkama P i Q, redom. Točka R je odabrana na pravcu PQ tako da je $|BR| = |MR|$. Dokaži da je $BR||AC$.

(Ovdje se pretpostavlja da je simetrala kuta polupravac.)

16. (SL 2014) Neka je ABC trokut s opisanom kružnicom Ω i središtem upisane kružnice I. Neka pravac koji prolazi kroz točku I i okomit je na CI siječe dužinu $\overline{BC}$ i luk BC (koji ne sadrži A) kružnice Ω u točkama U i V, redom. Neka pravac koji prolazi kroz U i paralelan je pravcu AI siječe pravac AV u točki X i neka pravac koji prolazi kroz V i paralelan je s AI siječe pravac AB u točki Y. Neka su W i Z polovišta dužina $\overline{AX}$ i $\overline{BC}$, redom.

Dokaži da ako su točke I, X i Y kolinearne, onda su i točke I, W i Z kolinearne.

17. (IMO 2000) Neka su AH_1, BH_2 i CH_3 visine u šiljastokutnom trokutu ABC. Upisana kružnica dira stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ i $\overline{AB}$ u točkama T_1, T_2 i T_3, redom. Promotrimo zrcalne slike pravcima H_1H_2, H_2H_3 i H_1H_3 obzirom na pravce T_1T_2, T_2T_3 i T_1T_3. Dokaži da te slike određuju trokut čiji vrhovi leže na upisanoj kružnici trokutu ABC.

18. (IMO 2011) Neka je Γ opisana kružnica trokutu ABC. Neka je p tangenta na Γ i neka su p_a, p_b i p_c pravci dobiveni zrcaljenjem pravca p preko pravaca BC, CA i AB, redom. Dokaži da opisana kružnica trokua određenog pravcima p_a, p_b i p_c dira kružnicu Γ.