IMO pripreme 2016 – Ne samo znamenke

sastavio: Nikola Adžaga

9. 6. 2016.

1. zadatak: Promotrimo niz (x_n) realnih brojeva definiran rekurzivno $x_1 = 0$, $x_{n+1} = 5x_n + \sqrt{24x_n^2 + 1}$. Dokaži da su svi članovi niza cijeli brojevi.

2. zadatak: Dokaži da svaki prirodan $k > 1$ ima višekratnika manjeg od k^4 koji ima najviše 4 različite znamenke u dekadskom zapisu.

3. zadatak: Funkcija $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definirana je na sljedeći način: zapisivanjem broja $x \in \mathbb{N}$ u dekadskom obliku i zamjenom svake znamenke njenim kvadratom. Tako dobivamo $f(x)$, npr. $f(2) = 4, f(35) = 925, f(708) = 49064$. Riješi jednadžbu $f(x) = 29x$.

4. zadatak: Postoji li podskup X cijelih brojeva takav da za svaki cijeli n jednadžba $a + 2b = n$ ima točno jedno rješenje $a, b \in X$?

5. zadatak: Nađi sve moguće znamenke a takve da, za neki prirodni n, dekadski zapisi 2^n i 5^n počinju s a. Nađi nužan i dovoljan uvjet za određivanje svih takvih prirodnih n.

I za one koji nisu vidjeli, **N1 s IMO Shortlista 2001.**:
Dokaži da ne postoji prirodan broj n takav da je za svaki $k = 1, 2, \ldots, 9$ prva znamenka dekadskog zapisa broja $(n + k)!$ jednaka k.