Ljetne pripreme 2016 – Prebrojavanje i dvostruko prebrojavanje

Azra Tafro

Prebrojavanje

Navedimo neke osnovne tehnike prebrojavanja (pri čemu $|A|$ označava broj elemenata skupa A):

Princip sume: za skupove $A_1, \ldots, A_n$ koji su međusobno u parovima disjunktni ($A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j$) vrijedi

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|.$$

Princip produkta: za konačne skupove $A_1, \ldots, A_n$ vrijedi

$$|A_1 \times \cdots \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|.$$

Npr. koliko različitih odjevnih kombinacija možemo složiti od 5 različitih majica, 3 različita para hlača i 2 različita para cipela? $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$.

k**-permutacije**: broj uređenih k-torki međusobno različitih elemenata n-članog skupa je

$$P_k^n = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Npr. na koliko načina možemo između 10 učenika podijeliti jednu prvu, jednu drugu i jednu treću nagradu? $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

k**-kombinacije**: broj k-članih podskupova međusobno različitih elemenata n-članog skupa je

$$C_k^n = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}.$$

Npr. na koliko načina možemo između 10 učenika podijeliti tri iste čokolade tako da svatko dobije najviše jednu? $\binom{10}{3} = 120$.

Formula uključivanja i isključivanja: za skupove $A_1, \ldots, A_n$ općenito vrijedi

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i \neq j \neq k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|.$$

Zadaci za vježbu:

1. Koliko različitih djelitelja ima prirodni broj oblika $n = p_1^{a_1} \cdot \cdots \cdot p_k^{a_k}$ pri čemu su $p_1, \ldots, p_k$ njegovi različiti prosti faktori?

2. Zadan je skup $S = \{1, 2, \ldots, 100\}$ i skup

   $$A = \{(a, b, c) \,:\, a, b, c \in S,\ a < b,\ a < c\}.$$

   Koliko skup A ima elemenata? (Rj: 328350.)

3. Na zabavi je 7 mladića i 3 djevojke. na koliko načina ljude možemo posložiti u red tako da

   - se djevojke nalaze na prva tri mjesta? (Rj: $3! \cdot 7!$.)
   - tri djevojke stoje zajedno? (Rj: $3! \cdot 8!$.)
   - se mladići nalaze na prvoj i posljednjoj poziciji i nema susjednih djevojaka? (Rj: $7! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$.)

4. Na koliko načina možemo odabrati grupu od 5 osoba iz grupe od 4 profesora i 7 učenika

   - ako nema restrikcija? (Rj: $\binom{11}{5}$.)
   - tako da u grupi budu točno dva profesora?(Rj: $\binom{4}{2} \cdot \binom{7}{3}$.)
   - tako da u grupi budu barem tri profesora?(Rj: $84 + 7 = 91$.)
   - tako da određeni profesor i student ne budu u grupi? (Rj: $\binom{9}{5}$.)

5. Pauk ima po jednu cipelu i jednu čarapu za svaku od svojih 8 nogu. Na koliko načina se pauk može obuti ako na svaku nogu najprije mora obući čarapu, a onda cipelu? (Pauk ima točno određene čarape i cipele za svaku nogu, razlikujemo samo redoslijed kojim ih oblači.) (Rj: $\frac{16!}{2^8}$.)

6. Šest putujućih trgovaca obilazi četiri trgovine tako da svaki trgovac posjeti točno jednu trgovinu. Na koliko načina se mogu rasporediti tako da svakog kupca obiđe barem jedan prodavač? (Uputa: FUI)

Dvostruko prebrojavanje

Ideja "dvostrukog prebrojavanja" je uočiti neki element problema (često uređene parove ili uređene trojke) na dva različita načina te iz jednakosti tih izraza doći do traženog zaključka.

Primjer (Lema o rukovanju): Dokažite da je u svakom grafu zbroj stupnjeva svih vrhova paran. Ili: U grupi ljudi neki od njih se rukuju. Dokažite da je ukupan broj ruku uključenih u rukovanja paran.

Dokaži sljedeće tvrdnje koristeći kombinatorne argumente:

1. $C_k^n = C_{n-k}^n$
2. $P_k^n = nP_{k-1}^{n-1}$
3. $P_k^{n+1} = P_k^n + kP_{k-1}^n$
4. $\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$
5. $\sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}$
6. $\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1}$
7. $\sum_{r=k}^{n} \binom{n}{r}\binom{r}{k} = 2^{n-k}\binom{n}{k}$
8. $C_k^n = C_{k-1}^{n-1} + C_k^{-1}$.

Zadaci za vježbu:

1. 15 učenika sudjeluje na ljetnoj školi. Svaki dan troje od njih čiste učionicu nakon nastave, nastava traje k dana, a svaki par učenika zajedno čisti učionicu točno jednom. Odredi k. (Rj: 15.)

2. Na nekom natjecanju svaki učenik riješio je točno tri zadatka, a svaki zadatak riješilo je točno troje učenika. Dokaži da su broj učenika i broj zadataka jednaki.

3. Na svako polje ploče $n \times n$ upisan je broj koji je jednak broju pravokutnika koji sadrže to polje. Odredite sumu svih upisanih brojeva. (Rj: $\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\right)^2$.)

4. Neka je $p_n(k)$ broj permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, $n \geq 1$ koje imaju točno k fiksnih točaka (i je fiksna točka ako se broj i nalazi na i-tom mjestu u permutaciji). Dokaži da vrijedi

$$\sum_{k=0}^{n} k p_n(k) = n!.$$

5. Na matematičkom natjecanju sudjeluje 200 učenika. Natjecanje se sastoji od 6 zadataka, i svaki zadatak riješilo je barem 120 učenika. Dokaži da postoje dva učenika takva da je svaki zadatak riješio barem jedan od njih.

6. U školi je 2007 učenika i 2007 učenica. Svaki učenik ili učenica učlanjen je u najviše 100 školskih klubova, a za svakog učenika i učenicu postoji barem jedan klub u kojem su oboje članovi. Dokaži da postoji klub u koji je učlanjeno barem 11 učenika i barem 11 učenica.