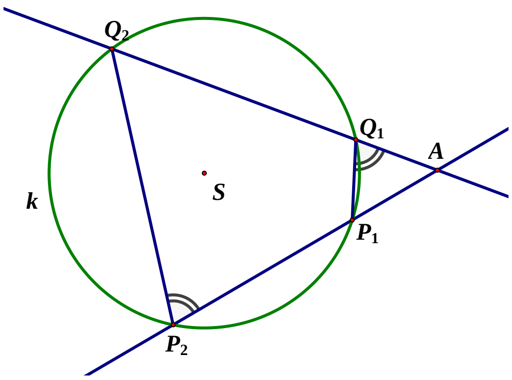
Ljetne pripreme 2016. – 8. razred

Eva Špalj - Potencija točke s obzirom na kružnicu

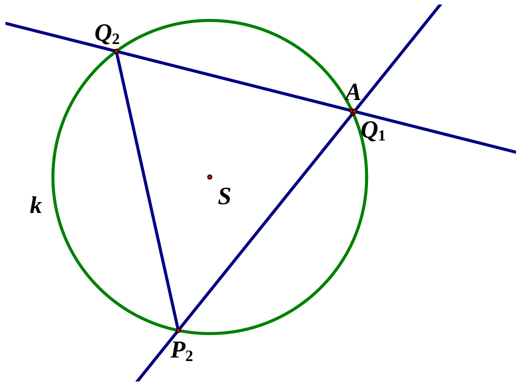
1. Neka je zadana kružnica $k(S, r)$ i točka A u ravnini. Dokažite da je za svaki pravac te ravnine koji sadrži točku A i siječe kružnicu u točkama Q_1 i Q_2 izraz $|AQ_1| \cdot |AQ_2|$ konstantan.

Rješenje: Proučimo tri slučaja:

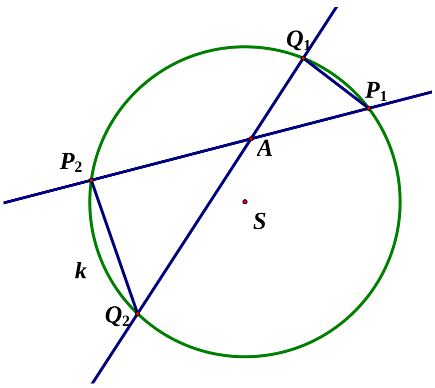
a. Točka A je izvan kružnice.



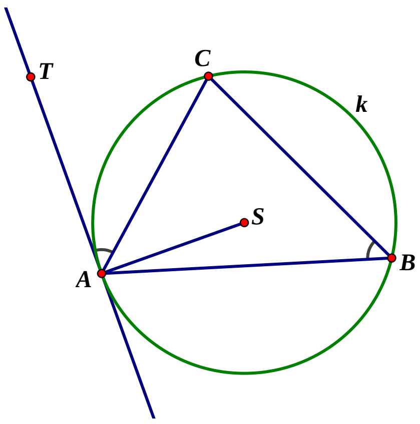
b. Točka A je na kružnici.



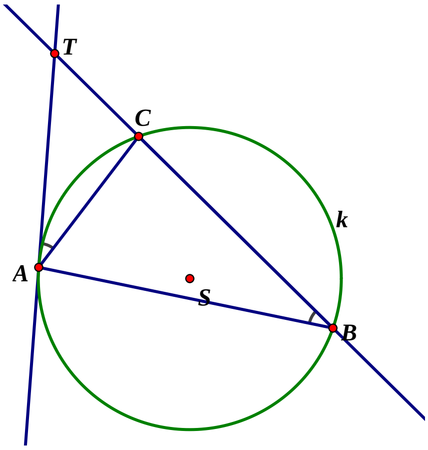
c. Točka je unutar kružnice.



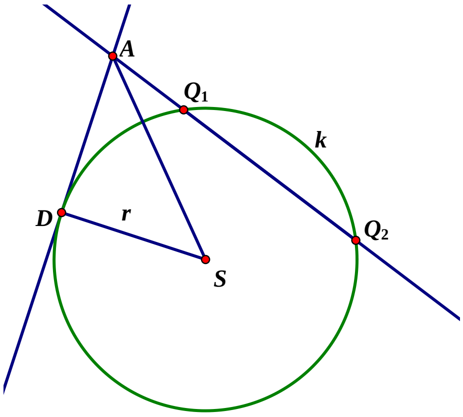
2. Trokutu ABC opisana je kružnica i u vrhu A povučena je tangenta. Neka je T proizvoljna točka na tangenti tako da se točke T i B nalaze na različitim stranama pravca AB. Dokažite da je $\angle TAC = \angle ABC$.

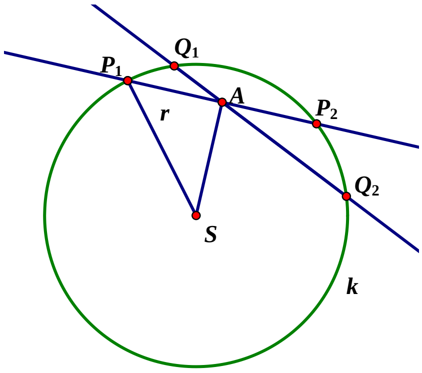


3. U vrhu A trokuta ABC povučena je tangenta na kružnicu opisanu trokutu ABC. Neka je točka T presjek pravca BC i te tangente. Dokažite da je $|TC|\cdot|TB|=|TA|^2$.



4. Dokažite da je $|AQ_1|\cdot|AQ_2|=|AS|^2-r^2$.





Definicija

Neka je zadana kružnica $k(S,r)$ i točka A u ravnini. Umnožak $p=|AQ_1|\cdot|AQ_2|$, pri čemu su Q_1 i Q_2 proizvoljne točke na kružnici $k(S,r)$, zove se potencija p točke A s obzirom na kružnicu k.

$$\text{Primijetimo da je } p=\begin{cases} <0, & \text{točka } A \text{ unutar kružnice} \\ =0, & \text{točka } A \text{ na kružnici} \\ >0, & \text{točka } A \text{ izvan kružnice} \end{cases}$$

5. Zadan je četverokut $ABCD$ i točka T na presjeku pravaca AB i CD tako da vrijedi $|TA|\cdot|TB|=|TC|\cdot|TD|$. Dokažite da je četverokut $ABCD$ tetivni.

6. Koju najmanju vrijednost može imati potencija točke u odnosu na kružnicu polumjera r? Koja točka ima tu ekstremnu vrijednost?

7. Odredite skup točaka koji ima konstantnu potenciju u odnosu na danu kružnicu.

Radikalna (potencijalna) os

8. Ako su A i B točke u ravnini i d pozitivan realni broj, tada je skup svih točaka T takvih da je $|AT|^2 - |BT|^2 = d^2$ pravac okomit na pravac AB.

9. Skup svih točaka ravnine kojima su potencije u odnosu na dvije dane nekoncentrične kružnice međusobno jednake jest pravac okomit na spojnicu središta tih kružnica.

Definicija

Geometrijsko mjesto točaka ravnine koje imaju jednaku potenciju na dvije nekoncentrične kružnice naziva se radikalna (potencijalna) os.

10. Neka su k_1 i k_2 dvije kružnice koje se sijeku u točkama A i B. Dokažite da je pravac AB geometrijsko mjesto svih točaka koje imaju jednaku potenciju na obje kružnice.

11. Dane su kružnice k_1 i k_2 koje se sijeku u točkama A i B te zajednička tangenta na te dvije kružnice koja ih dira u točkama C i D. Neka je M točka na presjeku pravaca AB i CD. Dokažite da je $|CM| = |DM|$.

12. Kružnice k_1 i k_2, radijusa r_1 i r_2, dodiruju se izvana u točki A. Na kružnici k_1 odabrana je točka B i neka da je $|AB| = a$. Neka je T dirалište tangente na kružnicu k_2 povučene iz točke B. Izrazite $|BT|$ pomoću r_1, r_2 i a.

13. Dana je kružnica promjera $\overline{AB}$ i proizvoljne točke D i C na luku AB. Neka je E točka na presjeku pravaca AD i BC. Dokažite da vrijednost izraza $|AE| \cdot |AD| + |BE| \cdot |BC|$ ne ovisi o izboru točaka D i C.

14. Dane su tri kružnice k_1, k_2 i k_3 te pravci s_1, s_2 i s_3 koji su redom radikalne osi parova kružnica (k_1, k_2), (k_2, k_3) i (k_1, k_3). Dokažite da su s_1, s_2 i s_3 paralelni pravci ako su središta danih kružnica kolinearna, a u suprotnom prolaze istom točkom. Ta se točka zove radikalno središte.

15. Dvije se kružnice k_1 i k_2 sijeku u točkama S i T. Neka je P točka na pravcu ST. Na kružnici k_1 odabrane su točke A i B, a na k_2 odabrane su točke C i D takve da su točke A, B i P te točke C, D i P kolinearne. Dokažite da je četverokut $ABCD$ tetivni.

16. Dan je trokut ABC i točka T na pravcu AB takva da vrijedi $|TA| \cdot |TB| = |TC|^2$. Dokažite da je pravac TC tangenta na kružnicu opisanu trokutu ABC.

17. Dan je paralelogram $ABCD$ takav da je $\angle ABC > 90°$, odnosno $|AC| > |BD|$. Kružnica opisana trokutu BCD siječe dijagonalu AC u točki M. Dokažite da je pravac BD zajednička tangenta na kružnice opisane trokutima ABM i ADM.

18. Na stranicama BC, CA i AB trokuta ABC odabrane su redom točke D, E i F takve da je četverokut $BCEF$ tetivni. Neka je T sjecište kružnica opisanih trokutima BDF i CDE. Dokažite da su točke A, D i T kolinearne.

19. Na stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC odabrane su redom točke E i F takve da su pravci EF i BC paralelni. Dokažite da se kružnice kojima su $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$ promjeri sijeku na pravcu koji prolazi vrhom A, a okomit je na stranicu BC trokuta.

20. Neka su k_1 i k_2 dvije kružnice koje se ne sijeku. Dokažite da je geometrijsko mjesto središta kružnica koje su ortogonalne na njih njihova radikalna os.

Napomena: dvije su kružnice ortogonalne ako se sijeku i tangente povučene na te kružnice u njihovom sjecištu su međusobno okomite.

21. Neka su A, B, C i D kolinearne točke tim redoslijedom. Kružnice promjera $|AC|$ i $|BD|$ sijeku se u točkama X i Y. Neka je P točka na pravcu XY koja se ne nalazi na pravcu AB te neka su M i N drugi presjeci pravaca CP i BP s kružnicama nad $|AC|$ i $|BD|$, tim redom. Dokažite da se pravci AM, DN i XY sijeku u jednoj točki.

22. Neka je ABC šiljastokutan trokut s ortocentrom H i D točka na stranici BC. Neka su E i F redom nožišta visina iz vrhova B i C. Neka je k_1 kružnica opisana trokutu BDF i točka X takva da je $|DX|$ promjer kružnice k_1. Analogno su definirane kružnice k_2 i Y. Dokažite da su točke X, Y i H kolinearne.

Literatura:
M. Mitrović, S. Ognjanović, M. Veljković, LJ. Petković, N. Lazarević: Geometrija za prvi razred Matematičke gimnazije, Krug, Beograd, 1988.
D. Palman: Trokut i kružnica, Element, Zagreb, 1994.
http://mnm.hr/online-predavanja