MEMO pripreme 2016. Nikola Adžaga, 16. 6. 2016.

Zaključivanje u teoriji brojeva (ne samo diofantske jednadžbe)

Uvod i osnovne ideje

Kod diofantskih jednadžbi bez rješenja ili s malim (konačnim) brojem rješenja, koriste se kongruencije i smještanje između potencija. Ključna stvar kod kongruencija je znati odabrati pravi modul. Kod eksponencijalnih jednadžbi npr. $3^m + 7^n = k^2$, prvo koristimo brojeve koji su nam već dani, 3 i 7 (a tek onda ima smisla iskušavati i druge module). Kod polinomnih jednadžbi nekog stupnja, dobro je odabrati modul n takav da eksponent dijeli $\varphi(n)$. Npr. u jednadžbi $x^5 + y^5 + z^5 = 20152015$, budući da $5 \mid 10 = \varphi(11)$, dobro je gledati jednadžbu modulo 11.

Izvadak iz prošlogodišnjeg MEMO predavanja: "Kod diofantskih jednadžbi s konačno rješenja koriste se nejednakosti, posebno smještanje između kvadrata ili drugih potencija. Npr. jednadžba $n^2 + 1 = m^2$ sigurno nema rješenja u prirodnim brojevima jer je $n^2 < n^2 + 1 < (n + 1)^2$ za sve prirodne brojeve n. Ponekad se ova metoda primjenjuje na diskriminantu kvadratne jednadžbe čija rješenja trebaju biti cjelobrojna".

Prokomentirajmo diofantsku jednadžbu s ovogodišnje Hrvatske matematičke olimpijade – $p(p^2 - p - 1) = q(2q + 3)$. Jednadžba je bila zadana u prostim brojevima (p, q), ali razmislimo kako bismo mogli dokazati da ima konačno, tj. mali broj rješenja. Neki učenici pokušavali su direktno koristiti kongruencije – međutim, ta metoda sigurno neće upaliti ako je primijenimo direktno na jednadžbu. Naime, ova jednadžba ima rješenje $(0, 0)$, pa kad je pogledamo modulo bilo što – ponovo će imati (barem) rješenje $(0, 0)$. To sugerira da jednadžbu treba nekako transformirati (tako da nema rješenje $(0, 0)$) i/ili da treba koristiti smještanje između kvadrata (ili drugih potencija).

Da bismo pojednostavili problem diofantskog tipa, koristimo i linearne kombinacije. Npr. pronađimo prirodne brojeve a takve da $3a-1 \mid a^3-a^2-a-1$. Iz danoga linearnim kombinacijama slijedi da $3a - 1 \mid 3(a^3 - a^2 - a - 1) - a^2 \cdot (3a - 1) = -(2a^2 + 3a + 3)$. Ponavljanjem ovog postupka (spuštanje stupnja) slijedi da $3a - 1 \mid 38$, pa je $a \in \{0, 1, -6, 13\}$. Linearne kombinacije koriste se i kod jednadžbi s više varijabli, da bi se smanjio ukupni stupanj ili stupanj pojedine varijable.

Kod diofantskih jednadžbi s beskonačno rješenja koristi se indukcija, a za dokazivanje da nema rješenja izvan nekih klasa, koristi se svojevrstan princip ekstrema i beskonačnog spusta – pretpostavi se da postoje neka druga rješenja, odabere se rješenje minimalno u nekom smislu, a onda se konstruira "manje" rješenje čime se dobiva kontradikcija. Tu spada npr. Vièta jumping.

Zadaci

1. Dokaži da jednadžba $x^8 + y^8 + z^8 = 340000005$ nema cjelobrojnih rješenja.

   Rješenje. Ključno je znati odabrati pravi modul – kod potencija je dobro odabrati broj n takav da eksponent dijeli $\varphi(n)$. Budući da $8 \mid 16 = \varphi(17)$, gledamo jednadžbu modulo 17.

   Desna strana je $340000005 \equiv 5 \pmod{17}$. S druge strane, po malom Fermatovom teoremu, ako $17 \nmid a$, onda $17 \mid a^{16} - 1 = (a^8 - 1)(a^8 + 1)$, pa je $a^8 \equiv 0, \pm 1 \pmod{17}$, pa je lijeva strana kongruentna nekom od brojeva $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ (tj. $14, 15, 16, 0, 1, 2, 3$). Budući da 5 nije među tim brojevima, ova jednadžba zaista nema rješenja.

2. Odabirom kojeg modula ćemo dokazati da sustav jednadžbi

$$x^6 + x^3 + x^3y + y = 147^{157}$$
$$x^3 + x^3y + y^2 + y + z^9 = 157^{147}$$

   nema rješenja u cijelim brojevima? *(USAMO 2005).*

3. Neka su a i b prirodni brojevi takvi da je $a + b$ paran broj. Dokažite da $a^2 - a - b^2$ nije kvadrat prirodnog broja.

4. Dokaži da postoji beskonačno mnogo prostih brojeva p takvih da kongruencija

$$3x^3 + 4y^4 + 5z^3 - y^4z \equiv 0 \pmod{p}$$

   ima točno p^2 rješenja $(x, y, z) \in \{0, 1, \ldots, p - 1\}^3$.

5. Nađi sve parove prirodnih brojeva (x, y) takve da $xy^2 + y + 7$ dijeli $x^2y + x + y$. *(IMO 1998.)*

6. Odredi sve parove prirodnih brojeva (m, n) za koje $2mn^2 - n^3 + 1$ dijeli m^2. *(IMO 2002)*

7. Nađi sve parove prirodnih brojeva $(x, y), x \neq y$ koji zadovoljavaju jednadžbu

$$x(x + y) = y^2 + 1.$$

   (Mala olimpijada 2004.)

8. Nađi sve parove prostih brojeva (p, q) za koje istodobno vrijedi:

$$p^2 \mid q^3 + 1$$

$$q^2 \mid p^6 - 1.$$

9. Skup M ima 2016 prirodnih brojeva, od kojih nijedan nema prostog djelitelja većeg od 23. Dokaži da M sadrži podskup od 4 elementa čiji je produkt četvrta potencija prirodnog broja.

10. Neka je k fiksan prirodan broj. Niz $\{a_n\}_{n \geq 1}$ definiran je na sljedeći način:

$$a_1 = k + 1, a_{n+1} = a_n^2 - ka_n + k.$$

   Dokaži da su, ako je $m \neq n$, brojevi a_m i a_n relativno prosti.

Dodatni izvori zadataka i rješenja

- Matija Bašić, *Diofantske jednadžbe koje svaki šonjo zna riješiti, a olimpijcima je korisno znati*, http://web.math.pmf.unizg.hr/ mbasic/materijali.htm
- Amir Hossein Parvardi, *Lifting The Exponent Lemma*, http://www.taharut.org/imo/LTE.pdf
- PEN projekt, https://projectpen.wordpress.com/