MEMO pripreme 2016 – Fermat, Euler, kineski teorem

Matko Ljulj

9. 6. 2016.

Zadaci

1. Dokaži da postoji (beskonačan) niz prirodnih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ takav da se svaki prirodni broj pojavi u njemu točno jednom te da je zadovoljeno
$$n | a_1 + \ldots a_n.$$
2. Nađi sve pozitivne realne brojeve x takve da je
$$x\lfloor x\lfloor x\lfloor x\rfloor\rfloor\rfloor = 88.$$
3. Dokaži da u svakom (beskonačnom) aritmetičkom nizu postoji beskonačno mnogo članova koji imaju isti "fond" prostih brojeva.

   Brojevi m i n imaju isti fond prostih brojeva ako za svaki prost p vrijedi $p|m \iff p|n$.
4. Dan je skup $S = \{2^n - 3 \;:\; n \in \mathbb{N}\}$. Dokaži da postoji beskonačan podskup skupa S takav da se u njemu nalaze samo u parovima relativno prosti brojevi.
5. Nađi sve $n \in \mathbb{N}$ takve da je $(d(n))^3 = 4n$.

   Za prirodan n izraz $d(n)$ označava broj djelitelja od n.
6. Dokaži da je za sve prirodne n (beskonačan) niz
$$2, 2^2, 2^{2^2}, 2^{2^{2^2}}, \ldots \;(mod\ n)$$
   konstantan počevši od nekog člana.
7. Dan je polinom p s cjelobrojnim koeficijentima i k cijelih brojeva
$$a_1 < a_2 < \ldots < a_k.$$
   Pretpostavimo da je $p(a_i) \neq 0$ za sve $1 \leq i \leq k$.
   - Dokaži da postoji $a \in \mathbb{Z}$ takav da $p(a_i)|p(a)$ za sve $1 \leq i \leq k$.
   - Postoji li nužno $a \in \mathbb{Z}$ takav da $(p(a_1) \cdot \ldots \cdot p(a_k))|p(a)$?
8. Za prirodan broj n neka $f(n)$ označava sumu brojeva djelitelja svih djelitelja broja n. Nađi sve prirodne n takve da je $f(n) = n$.
9. Dokaži da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji n-člani podskup prirodnih brojeva sa sljedećim svojstvom: za bilo kojih k različitih prirodnih brojeva vrijedi da je aritmetička sredina tih brojeva potpuna potencija prirodnog broja, tj. oblika a^r pri čemu je $a, r \geqslant 2$.