2./3. razred pripreme 2016 – Djelitelji

Vanja Wagner

14. 6. 2016.

Svaki prirodni broj n možemo rastavitina proste faktore,

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k},$$

gdje su $p_1, ..., p_k$ različiti prosti brojevi i $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{N}_0$ njihove kratnosti. Tada je broj djelitelja $d(n)$ broja n iz skupa $\mathbb{N}$ jednak

$$d(n) = (\alpha_1 + 1) \cdot ... \cdot (\alpha_k + 1).$$

Uočimo da ako $d|n$ tada i $\frac{n}{d}|n$. Ako uredimo sve prirodne djelitelje broja n,

$$1 = d_1 < d_2 < .... < d_{d(n)} = n,$$

uočimo da vrijedi relacija

$$d_k = \frac{n}{d_{d(n)-k+1}}, \quad k = 1, ..., d(n).$$

Zadaci

1. Neka je $n \in \mathbb{N}$ t.d. $n \geq 2$. Dokažite da je
$$a = d_1 d_2 + d_2 d_3 + ... + d_{d(n)-1} d_{d(n)} < n^2$$
i odredite kada je a djelitelj od n^2.
2. Za $n \in \mathbb{N}$ sa $s(n)$ označimo zbroj njegovih prirodnih djelitelja. Odredi sve $n \in \mathbb{N}$ t.d.
$$s(n) = n + d(n) + 1.$$
3. Nađite sve $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $d(n) = 6$ i $n + 1 = 5(d_2 + ...d_5)$.
4. Odredi sve $n \in \mathbb{N}$ t.d. je umnožak svih prirodnih djelitelja broja n jednak n^3. Prikažite rješenje u kanonskom obliku.
5. Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $d(n) \geq 4$. Odredi n ako je
$$n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2.$$
6. Odredite sve $n \in \mathbb{N}$ t.d. je $d(n) = 16$, $d_6 = 18$ i $d_9 - d_8 = 17$.
7. Dan je broj $n = p_1 p_2 p_3 p_4$, gdje su $p_1, ..., p_4$ različiti prosti brojevi. Postoji li $n < 2001$ t.d. je $d_9 - d_8 = 22$?
8. Nekaj je $n \in \mathbb{N}$ i $d(n) \geq 22$. Odredite n t.d. je
$$d_7^2 + d_{10}^2 = \left(\frac{n}{d_{22}}\right)^2.$$