MEMO pripreme 2016 – Pripisane kružnice

Stipe Vidak

13. 6. 2016.

U ovom predavanju ćemo vidjeti kako se neke manje i više poznate činjenice o pripisanim kružnicama mogu zgodno iskoristiti u geometrijskim zadacima. U nekima od tih zadatka neće biti niti spomena o pripisanim kružnicama pa je u njima glavna ideja samo uvođenje pripisanih kružnica ili automatska primjena neke od činjenica. Sve te činjenice navodimo u obliku teorema.

Uvedimo najprije nekoliko oznaka. S I_A ćemo označavati središte A-pripisane kružnice trokuta ABC, a s X_A, Y_A, Z_A dirališta te A-pripisane kružnice redom s pravcima BC, CA, AB.

- **Teorem 1** Uz uvedene oznake vrijedi $|AY_A| = |AZ_A| = s$, $|BX_A| = |BZ_A| = s - c$ i $|CX_A| = |CY_A| = s - b$.
- **Teorem 2** Neka je M_A polovište luka BC (koji ne sadrži točku A) kružnice opisane trokutu ABC. Tada I, I_A, B, C leže na kružnici sa središtem M_A.
- **Teorem 3** Neka upisana kružnica trokuta ABC dira $\overline{BC}$ u točki D. Tada je točka X_A centralno simetrična točki D s obzirom na polovište stranice $\overline{BC}$. Nadalje, ako je P točka na upisanoj kružnici trokuta ABC koja je dijametralno suprotna točki D, tada su točke A, P, X_A kolinearne.
- **Teorem 4** Neka je N_A polovište luka BC (koji sadrži točku A) kružnice opisane trokutu ABC. Tada I_B, I_C, B, C leže na kružnici sa središtem N_A.
- **Teorem 5** Kružnica opisana trokutu ABC je "kružnica 9 točaka" trokuta $I_AI_BI_C$. Spomenutih "9 točaka" su točke N_A, N_B, N_C (polovišta stranica), A, B, C (nožišta visina) M_A, M_B, M_C (polovišta spojnica vrhova s ortocentrom).

Teorem 2 poznat je još i pod nazivom "Lema o trozupcu".

U zadacima olimpijskog tipa najkorisniji je Teorem 3 koji u sebi sadrži dvije jako zanimljive i netrivijalne tvrdnje.

Zadaci

1. (USAMO 2001) Neka je ABC trokut s upisanom kružnicom ω. Označimo s D_1 i E_1 točke u kojima ω dira redom stranice $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$. Označimo s D_2 i E_2 redom točke na stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ takve da je $|CD_2| = |BD_1|$ i $|CE_2| = |AE_1|$ te s P sjecište dužina $\overline{AD_2}$ i $\overline{BE_2}$. Kružnica ω siječe dužinu $\overline{AD_2}$ u dvije točke od kojih točku bližu točki A označimo s Q.

   Dokaži da vrijedi $|AQ| = |D_2P|$.

2. (USAMO 1999) Neka je $ABCD$ jednakokračni trapez u kojem je $AB \parallel CD$. Upisana kružnica ω trokuta BCD dira $\overline{CD}$ u točki E. Neka je F točka na simetrali kuta $\angle DAC$ takva da je $EF \perp CD$. Neka kružnica opisana trokutu ACF siječe pravac CD u točkama C i G.

   Dokaži da je trokut AFG jednakokračan.

3. (Balkan MO 2013) U trokutu ABC pripisana kružnica ω_a nasuprot A dodiruje AB u točki P, a AC u točki Q, dok pripisana kružnica ω_b nasuprot B dodiruje BA u točki M, a BC u točki N. Neka je K ortogonalna projekcija točke C na MN, a L ortogonalna projekcija točke C na PQ.

   Dokaži da je četverokut $MKLP$ tetivan.

4. (IMO 2012) U trokutu ABC točka J je središte pripisane kružnice nasuprot vrhu A. Ta pripisana kružnica dodiruje stranicu $\overline{BC}$ u točki M, a pravce AB i AC redom u točkama K i L. Pravci LM i BJ sijeku se u točki F, a pravci KM i CJ u točki G. Neka je S sjecište pravaca AF i BC, a T sjecište pravaca AG i BC.

   Dokaži da je M polovište dužine $\overline{ST}$.

5. (IMO 2006) Neka je ABC trokut sa središtem upisane kružnice I. U unutrašnjosti trokuta dana je točka P za koju vrijedi

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

   Pokaži da je $|AP| \geq |AI|$ i da jednakost vrijedi ako i samo ako se P podudara s I.

6. (IMO 2002) Kružnica S ima središte O, a $\overline{BC}$ joj je promjer. Neka je A točka na S takva da je $\angle AOB < 120°$. Neka je D polovište luka AB koji ne sadrži C. Pravac kroz O paralelan s DA siječe pravac AC u točki I. Simetrala dužine $\overline{OA}$ siječe S u točkama E i F.

   Dokaži da je I središte kružnice upisane trokutu CEF.

7. (IMO 2013) Neka pripisana kružnica trokuta ABC nasuprot vrhu A dira stranicu $\overline{BC}$ u točki A_1. Točke B_1 na $\overline{CA}$ i C_1 na $\overline{AB}$ definirane su analogno. Pretpostavimo da središte kružnice opisane trokutu $A_1B_1C_1$ leži na kružnici opisanoj trokutu ABC.

   Dokaži da je trokut ABC pravokutan.