IMO pripreme 2016 – Koaksijalnost

Stipe Vidak

19. 6. 2016.

U ovom predavanju upoznat ćemo se s jednom "davno zaboravljenom" lemom o tri koaksijalne kružnice i na nekoliko primjera vidjeti kako ju zgodno iskoristiti u rješavanju nekih jako zahtjevnih olimpijskih geometrijskih zadataka.

Koristit ćemo oznaku $\omega(P, k)$ za potenciju točke P obzirom na kružnicu k.

Lema Neka se kružnice k_1 i k_2 sijeku u točkama A i B. Neka je k_3 neka kružnica kroz točke A i B. Tada je k_3 geometrijsko mjesto svih točaka P za koje vrijedi $\dfrac{\omega(P, k_1)}{\omega(P, k_2)} = c$, gdje je c neka konstanta.

Zadaci

1. (IMO SL 2012, G8) Neka je dan trokut ABC s opisanom kružnicom ω i pravac l koji nema zajedničkih točaka s ω. Neka je P nožište okomice iz središta kružnice ω na pravac l. Neka pravci BC, CA, AB sijeku l redom u točkama X, Y, Z, različitima od P.

   Dokaži da kružnice opisane trokutima AXP, BYP i CZP imaju zajedničku točku različitu od P ili se sve međusobno diraju u P.

2. (Romanian TST 2010) Neka je l pravac, a γ i γ' dvije kružnice. Pravac l siječe γ u točkama A i B, a γ' u točkama A' i B'. Tangente na γ u A i B sijeku se u točki C, a tangente na γ' u A' i B' sijeku se u točki C'. Pravci l i CC' sijeku se u točki P. Neka je λ varijabilni pravac kroz P. Neka je X jedna od točaka u kojima λ siječe γ te neka je X' jedna od točaka u kojima λ siječe γ'.

   Dokaži da točka presjeka pravaca CX i $C'X'$ leži na fiksnoj kružnici.

3. (Rusija) Neka je ABC trokut s upisanom kružnicom $\omega(I, r)$. Zajedničke tangente od ω i kružnice opisane trokutu BIC sijeku se u točki S. Također, te dvije kružnice sijeku se u točkama U i V.

   Dokaži da kružnica opisana trokutu SUV dodiruje kružnicu opisanu trokutu ABC.