MEMO pripreme 2016 – Princip ekstrema

Petar Bakić

24. 6. 2016.

Uvodni primjeri

1. Dokažite da svaki konveksni poliedar ima barem dvije stranice s jednakim brojem vrhova.

2. Dano je n točaka u ravnini od kojih svake tri zadaju trokut površine $\leqslant 1$. Dokažite da postoji trokut površine 4 koji sadrži svih n točaka.

Grafovi

3. Na treningu nogometne ekipe (11 igrača) svaki je nogometaš dobio loptu. Na trenerov znak, svaki je dodao loptu najbližem do sebe. Ako nikoje dvije udaljenosti među nogometašima nisu bile jednake u tom trenutku, dokažite:

   a) postoji barem jedan igrač koji nije dobio loptu;

   b) niti jedan igrač nije primio više od pet dodavanja.

4. Dokažite da u potpunom usmjerenom grafu postoji vrh u kojega se iz svakog drugog vrha može doći preko najviše dva brida.

5. Zadano je $2n$ točaka u ravnini tako da nikoje 3 nisu kolinearne. Dokažite da možemo podijeliti točke u n parova tako da se nikoje dvije spojnice (dužine koje spajaju članove pojedinog para) ne sijeku.

6. Graf s n vrhova i k bridova smješten je u ravninu tako da nikoja tri vrha ne leže na istom pravcu. Dokažite da ako G ne sadrži "trokut", mora biti $k \leqslant \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$.

Kombinatorna geometrija

7. U ravnini je zadano n pravaca od kojih nikoja dva nisu paralelna. Kroz svako sjecište dvaju pravaca prolazi još barem jedan pravac. Dokažite da se svi pravci sijeku u jednoj zajedničkoj točki.

8. Konačan skup točaka u ravnini ima sljedeće svojstvo: svaki pravac kroz dvije točke tog skupa prolazi i kroz treću. Pokažite da su sve točke kolinearne.

9. Svaki konveksni mnogokut površine 1 je sadržan u pravokutniku površine 2. Dokažite!

10. U ravnini je zadano $n \geqslant 3$ nekolinearnih točaka. Dokažite da postoji kružnica koja prolazi kroz tri dane točke, a u čijoj unutrašnjosti se ne nalazi niti jedna od preostalih točaka.

11. U svakom konveksnom mnogokutu postoje tri uzastopna vrha A, B, C takva da kružnica opisana trokutu $\triangle ABC$ pokriva cijeli mnogokut.

12. U svakom mnogokutu postoje vrh i stranica koja ga ne sadrži takvi da je ortogonalna projekcija vrha na stranicu sadržana unutar stranice.

90+

13. Presjek tijela K i proizvoljne ravnine je krug (ako nije prazan). Dokažite da je K kugla.

14. Pokažite da se kocka ne može podijeliti na nekoliko manjih kocaka međusobno različitih veličina.

15. Od 30 učenika u nekom razredu, svaki ima jednak broj prijatelja. Koji je najveći mogući broj učenika koji plivaju brže od većine svojih prijatelja?