MEMO pripreme 2016, Kombinatorna TB

sastavio: Domagoj Ćevid

20.6.2016.

1. Dokaži da ako uzmemo barem $n+1$ broj iz skupa $\{1 \dots 2n\}$ da će među njima biti dva relativno prosta broja i dva broja tako da jedan dijeli drugoga. Vrijedi li tvrdnja za n brojeva?
2. $\mathbb{N}$ je particioniran na konačno podskupova. Dokaži da postoji podskup S, tako da za svaki n, S sadrži beskonačno višekratnika broja n.
3. Dokaži da svaki skup od n brojeva ima podskup čiji je zbroj djeljiv sa n. Vrijedi li to i za manji skup?
4. Da li je moguće podijeliti skup $\{1, 2, \dots, 100\}$ na 12 disjunktnih geometrijskih nizova?
5. Nađi sve prirodne n tako da možemo podijeliti skup $\{n, n+1, \dots, n+5\}$ na dva podskupa sa istim umnoškom.
6. Neka je S skup od $n+2$ cijela broja od kojih nijedan nema apsolutnu vrijednost veću od n. Dokaži da postoje tri različita broja $a, b, c \in S$ tako da $a+b=c$.
7. Dokaži da za bilo koji a postoji niz $a = a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ tako da $a_1 + \dots + a_n \mid a_1^2 + \dots + a_n^2$ za svaki n.
8. Dokaži da za svaki n možemo naći skup S od n prirodnih brojeva tako da za svake $a, b \in S$, ab je djeljiv sa $(a-b)^2$.
9. Dokaži da se svaki broj može zapisati kao zbroj brojeva oblika $2^a 3^b$ koji se međusobno ne dijele.
10. Neka je S beskonačni podskup prirodnih brojeva tako za svaki njegov konačni podskup T, postoji broj > 1 koji dijeli svaki element skupa T. Dokaži da postoji broj > 1 koji dijeli svaki element skupa S. Vrijedi li ta tvrdnja i ako se ograničimo samo na podskupove veličine najviše k?
11. Dokaži da u svakom skupu od $(a-1)(b-1)+1$ prirodnih brojeva ili postoji a brojeva koji se međusobno dijele ili b brojeva tako da se nijedna dva ne dijele. Dokaži da svaki beskonačni skup ima beskonačni podskup brojeva koji se međusobno dijele ili beskonačni podskup tako da se nijedna dva broja međusobno ne dijele.
12. Na ploči pišu brojevi $1, 2, 3 \dots, n$. Mirko i Slavko igraju igru. U svakom potezu igrač koji je na potezu odabire jedan od preostalih brojeva na ploči i izbriše njega i sve njegove preostale djelitelje. Pobjeđuje onaj igrač koji izbriše zadnji broj sa ploče. Mirko je prvi na potezu. Za koje n Mirko ima pobjedničku strategiju?

13. $\mathbb{N}$ je obojan u dvije boje. Pokažite da za svaki n postoje $a, b > n$ takvi da su $a, b, a+b$ iste boje.

14. Dokaži ili opovrgni sljedeću tvrdnju: Ako $\mathbb{N}$ obojimo u dvije boje, postojat će ili beskonačni aritmetički niz jedne ili tročlani aritmetički niz druge boje.

15. Imamo 1000 zlatnika težine 10 grama i 1000 zlatnika težine 9.9 grama jednakog izgleda. Imamo vagu sa dvije posude uz pomoć koje možemo odrediti koja je strana teža. Želimo napraviti dvije hrpe sa jednako zlatnika, ali različite težine. Koliko nam je minimalno vaganja potrebno?

16. Neka je $\mathcal{F}$ familija tročlanih podskupova skupa $\{1, \ldots, n\}$ takvih da svaka dva različita elementa $A, B \in \mathcal{F}$ dijele najviše jedan element. Neka je $f(n)$ maksimalni mogući broj elemenata u $\mathcal{F}$. Dokaži:

$$\frac{(n-1)(n-2)}{6} \leq f(n) \leq \frac{(n-1)(n-2)}{6}$$

17. Imamo 27 utega identičnog izgleda i težina $1, 3, 3^2, \ldots 3^{26}$ te vagu sa dvije posude uz pomoć koje možemo očitati razliku težina lijeve i desne posude. Koliko je minimalno vaganja potrebno da bi odredili težine utega?

18. Neka je $A \subset S = \{1, 2, \ldots, 1000000\}$ veličine 101. Dokaži da postoje brojevi $t_1, t_2, \ldots, t_{100}$ u S tako da su skupovi

$$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\}, \qquad j = 1, 2, \ldots, 100$$

u parovima disjunktni.

19. Mirko je na papir napisao proizvoljni polinom $P \in \mathbb{N}_0[x]$. Slavko ga želi pogoditi. On može pitati Mirka koliko je $P(x)$ za neki realan broj x. Koliko mu je minimalno takvih pitanja potrebno da sa sigurnošću može odrediti taj polinom?

20. Neka je $a_1, a_2, \ldots$ niz cijelih brojeva koji sadrži beskonačno mnogo i pozitivnih i negativnih elemenata. Pretpostavimo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ daju različite ostatke pri dijeljenju sa n. Dokaži da se svaki cijeli broj pojavljuje točno jednom u tom nizu.

21. Neka je n neparan prirodan broj veći od 1 i neka su $c_1, c_2, \ldots, c_n$ cijeli brojevi. Za svaku permutaciju $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ brojeva $\{1, 2, \ldots, n\}$, definiramo $S(a) = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i$. Dokaži da postoje permutacije $a \neq b$ brojeva $\{1, 2, \ldots, n\}$ takve da $n! \mid S(a) - S(b)$.

22. 23 studenata se okupilo da bi igrali nogomet. Svaki student ima cijeli broj kilograma. Primijetili su da koji je god student sudac, preostalih 22 se može podijeliti u dva tima sa 11 igrača tako da imaju jednaki zbroj težina. Dokaži da su svi jednako teški.