IMO pripreme 2016 – Kombinatorne interpretacije

Grgur Valentić

lipanj 2016.

Zadaci

1. Niz $(a_n)_n$ zadan je s $a(1) = 0$, $a(n) = a(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$, $\forall n \geq 2$.

   (a) Nađite minimum i maksimum od $a(n)$ za $1 \leq n \leq 2016$.

   (b) Za koliko n takvih da je $1 \leq n \leq 2016$ vrijedi $a(n) = 0$?

2. Za $k \in \mathbb{N}$, neka je $p(k)$ najmanji prosti broj koji ne dijeli k, a $q(k)$ produkt svih prostih brojeva manjih od $p(k)$ (ako je $p(k) = 2$, tada je $q(k) = 1$). Zadan je niz $x_0 = 1$, $x_{n+1} = \frac{x_n p(x_n)}{q(x_n)}$, $\forall n \geq 0$. Odredi sve $n \in \mathbb{N}$ za koje je $x_n = 111111$.

3. Zadan je skup $X = \{1, \ldots, n\}$. Na koliko načina možemo izabrati uređenu trojku skupova (A, B, C) takvu da je $\emptyset \subseteq A \subseteq B \subseteq C \subseteq X$ i vrijedi $|B| = \frac{|A|+|C|}{2}$?

4. Neka su $n, k \in \mathbb{N}$. Odredite $\sum a_1 a_2 \ldots a_k$, gdje se sumira po svim uređenim n-torkama $(a_1, \ldots, a_k)$ prirodnih brojeva za koje vrijedi $a_1 + \ldots + a_k = n$.

5. Mogu li se svi prirodni brojevi podijeliti u 12 skupova tako da su $\forall k \in \mathbb{N}$, brojevi $k, 2k, \ldots, 12k$ u različitim skupovima?

6. Uređena n-torka prirodnih brojeva je *dobra* ako zadovoljava: $\forall k \geq 2$, ako je k u n-torci, tada je i $k-1$ u n-torci, te je prvo pojavljivanje od $k-1$ prije zadnjeg pojavljivanja od k. Koliko ima dobrih n-torki?

7. Špil se sastoji od 32 karte među kojima su 2 različita jokera na kojima piše broj nula, a od preostalih 30 je po 10 crvenih, bijelih i plavih na kojima pišu brojevi od 1 do 10, svaki jednom. *Ruka* je odabir nekoliko karata iz špila, a *vrijednost ruke* je $\sum 2^k$, gdje se sumira po svim kartama k iz ruke. Koliko ruku ima vrijednost 2016?

8. $S \subseteq \mathbb{N}_0$ je *dobar* ako je $0 \in S$, te $\forall k \in S$ vrijedi $k+8, k+9 \in S$. Koliko ima dobrih skupova?

9. *Binarna* n-torka je uređena n-torka koja se sastoji samo od brojeva 0 i 1. a_n je broj binarnih n-torki koje nemaju pod-trojku $(0,1,0)$, a b_n broj binarnih n-torki koje nemaju niti pod-četvorku $(0,0,1,1)$, niti pod-četvorku $(1,1,0,0)$. Dokažite: $\forall n \in \mathbb{N}$ vrijedi $b_{n+1} = 2a_n$.

10. Odredite broj nenegativnih cjelobrojnih osmorki $(a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4)$ takvih da je $0 \leq a_k \leq k$, za $1 \leq k \leq 4$ i vrijedi $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 2b_1 + 3b_2 + 4b_3 + 5b_4 = 19$.

11. S_7 je skup permutacija uređene sedmorke $(1,2,3,4,5,6,7)$. Za $\sigma \in S_7$, transpozicija je zamjena bilo koja dva elementa (npr. $(1,2,3,4,5,6,7) \to (7,2,3,4,5,6,1)$). Neka je $f(\sigma)$ minimalan broj transpozcija potrebnih za doći do $(1,2,3,4,5,6,7)$. Odredite $\sum\limits_{\sigma \in S_7} f(\sigma)$.

Hintovi

1. Definirajte b_n kao broj pojavljivanja 00 ili 11 u binarnom zapisu broja n, a c_n kao broj pojavljivanja 10 ili 01. Dokažite: $a_n = b_n - c_n$.

2. $x_n = p_0^{c_0} \cdot p_1^{c_1} \cdot \ldots$, gdje je n u bazi 2 oblika $c_0 + 2c_1 + 4c_2 + \ldots$, a $p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5, \ldots$ prosti brojevi.

3. Napišite 2 puta brojeve $1, \ldots, n$. Od tih $2n$ brojeva izaberite n.

4. Raspodijelite klasično n kuglica s $k - 1$ pregradom tako da je u svakoj pregradi bar 1 kuglica. "Izmnožite kuglice po pregradama pomoću distributivnosti" - tj. u svakoj pregradi označite po jednu kuglicu. $\binom{n+k-1}{n-k}$.

5. Zapišite broj u bazi 13 i pogledajte zadnju ne-nul znamenku.

6. $n!$, jednako koliko i permutacija skupa $\{1, \ldots, n\}$...

7. Nije težak.

8. Nacrtajte piramidu $1, \ldots, 7$, iznad njih $10 \ldots 15$, ..., na kraju 55. Za svaki od tih brojeva koje dodatno ubacimo u S, moramo ubaciti i sve iznad. Catalanov broj.

9. Definirajte $f(x_1, \ldots, x_k) = (|x_1 - x_2|, \ldots, |x_{k-1} - x_k|)$ i pokažite "surjektivnosti" te se uvjerite da točno 2 različite k-torke šalje u istu $k-1$-torku. Inače, ako vas zanima, probajte razmisliti o formalnoj domeni i kodomeni funkcije f.

10. $x_k = a_k + (k + 1)b_k$.

11. Definirajte $g(n)$ kao broj ciklusa u dekompoziciji (npr. $(3, 7, 6, 4, 5, 1, 2)$ se raspada na $(136, 27, 4, 5)$. Pokažite $f(\sigma) = n - g(\sigma)$. Za $\sum g(\sigma)$ prebrojte za svaki ciklus u koliko se permutacija javlja.