Pripreme 2016 – Indukcija

Grgur Valentić

lipanj 2016.

Zadaci su skupljeni s dva predavanja na istu temu, za učenike od prvog do trećeg razreda i za MEMO kandidate. Zato su zadaci podjeljeni u 2 odlomka. U uvodu su zadaci s detaljnim objašnjenjem principa indukcije, a nakon toga slijede zadaci za samostalan rad koji su poredani otprilike po težini. Na kraju su hintovi.

Uvod

Princip matematičke indukcije je najlakše vidjeti na primjeru, ali ipak ćemo prvo iznijeti "strogu" definiciju u jednom specijalnom slučaju kako bi se upoznali s terminlogijom.

Neka je dana tvrdnja koja vrijedi za $n = 1$. Ako uz pretpostavku "Tvrdnja vrijedi za $n = k$" uspijemo dobiti "Tvrdnja vrijedi za $n = k + 1$" (neovisno o broju k), tada tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve n.

Činjenicu da tvrdnja vrijedi za $n = 1$ zvat ćemo baza $\boxed{\text{B}}$. Pretpostavku da vrijedi za $n = k$ označavat ćemo s $\boxed{\text{P}}$, te ćemo iz nje htjeti dokazati da tvrdnja vrijedi za $n = k + 1$ i to ćemo zvati korak $\boxed{\text{K}}$ - najčešće "najteži" dio indukcije za pokazati.

Skica ideje indukcije je sljedeća: $\boxed{\text{B}}$ znamo, pa u $\boxed{\text{P}}$ uvrstimo $k = 1$. Sad iz $\boxed{\text{K}}$ čitamo: ako tvrdnja vrijedi za $n = 1$, vrijedi i za $n = 2$. Obzirom da za $n = 1$ vrijedi, vrijedi i za $n = 2$. Sad u $\boxed{\text{P}}$ uvrstimo $k = 2$ pa iz $\boxed{\text{K}}$ dobijemo da vrijedi i za $n = 3$ pa taj postupak ponavljamo dok ne pokrijemo sve prirodne brojeve.

Ovo je samo jedna od mogućih shema indukcije - vjerojatno odmah uviđate da baza ne mora nužno početi od 1. Kroz razne sheme ćete se upoznati kroz zadatke.

1. Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

   <u>rješenje:</u>

   $\boxed{\text{B}}$ Za $n = 1$ tvrdnja postaje $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ što vrijedi.

   $\boxed{\text{P}}$ Neka tvrdnja vrijedi za $n = k$.

   $\boxed{\text{K}}$ Dokazujemo da vrijedi i za $n = k + 1$. Treba vidjeti da je

   $$1 + 2 + \ldots + k + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

   Prvih k sumanada lijevo je po $\boxed{\text{P}}$ jednako $\frac{k(k+1)}{2}$, pa treba provjeriti da je

   $$\frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

   što se lako vidi da je istina.

   Shema indukcije u ovom zadatku je

1	2	3	4	...
B				

2. Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi $4|n^4 - n^2$.

rješenje:

$\boxed{\text{B}}$ Za $n = 1, 2, 3, 4$ tvrdnja postaje redom $4|0$, $4|12$, $4|72$, $4|240$, a sve od navedenog vrijedi.

$\boxed{\text{P}}$ Neka tvrdnja vrijedi za $n = k$.

$\boxed{\text{K}}$ Dokazujemo da vrijedi i za $n = k + 4$. Treba vidjeti da

$$4|(k+4)^4 - (k+4)^2.$$

Računamo,

$$(k+4)^4 - (k+4)^2 = k^4 + 4k^3 \cdot 4 + 6k^2 \cdot 4^2 + 4k \cdot 4^3 + 4^4 - k^2 - 2k \cdot 4 - 4^2$$

Prema $\boxed{\text{P}}$ znamo da $4|k^4 - k^2$, a ostatak sumanada je očito djeljiv s 4 pa smo dokazali $\boxed{\text{K}}$.

Primjetite da nam je sada baza morala sadržavati zaista sve brojeve od 1 do 4. Štoviše, mogli smo za bazu uzeti i brojeve od -1 do 2 da si olakšamo račun.

Shema indukcije u ovom zadatku je

1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
B	B	B	B						

3. Odredite sve funkcije $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, takve da je $f(x+y) = f(x) + f(y)$, za sve $x, y \in \mathbb{Z}$.

rješenje:

Uvrstimo $x = y = 0$ da dobijemo $f(0) = 2f(0)$, pa dobivamo $f(0) = 0$. Neka je $f(1) = c$.

Uvrstimo $x = 1, y = -1$, pa dobijemo $f(0) = f(1) + f(-1)$, odnosno $f(-1) = -c$.

Tvrdimo da je $f(x) = cx$, za svaki $x \in \mathbb{Z}$.

$\boxed{\text{B}}$ Za $x = 1, -1$ tvrdnja je istinita.

$\boxed{\text{P}_1}$ Neka tvrdnja vrijedi za $x = k$.

$\boxed{\text{K}_1}$ Dokazujemo da vrijedi i za $n = k + 1$.

Uvrstimo $x = k, y = 1$, pa dobijemo

$$f(k+1) = f(k) + f(1) = \text{zbog } \boxed{\text{P}_1} \text{ i } \boxed{\text{B}} = kc + c = (k+1)c.$$

$\boxed{\text{P}_2}$ Neka tvrdnja vrijedi za $x = -k$.

$\boxed{\text{K}_2}$ Dokazujemo da vrijedi i za $n = -k - 1$.

Uvrstimo $x = -k, y = -1$, pa dobijemo

$$f(-k-1) = f(-k) + f(-1) = \text{zbog } \boxed{\text{P}_2} \text{ i } \boxed{\text{B}} = -kc - c = (-k-1)c$$

Na kraju, lako se provjeri da funckija $f(x) = xc$, za proizvoljni c zadovoljava uvjet zadatka.

Shema indukcije u ovom zadatku je

...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
			B		B			

4. Na stolu su 2 neprazne hrpe graha. Dozvoljen potez je pojesti jednu cijelu hrpu i drugu rastaviti na dvije neprazne hrpe. Igru igraju 2 igrača naizmjence a onaj koji ne može napraviti potez gubi. Dokaži da ako postoji hrpa s parno mnogo graha, prvi igrač ima pobjedničku strategiju.

<u>rješenje:</u>

$\boxed{\text{B}}$ Nek postoji hrpa s parno mnogo graha i ukupan broj graha je ≤ 3. Tad je jedino moguće da je raspored na hrpama 1, 2. Prvi igrač pojede hrpu s 1 grahom i podijeli drugu na dvije hrpe s po jednim grahom. Drugi igrač sad ne može napraviti potez pa je izgubio.

$\boxed{\text{P}}$ Ako postoji hrpa s parno mnogo graha i ukupan broj graha je $\leq k$, prvi igrač pobjeđuje.

$\boxed{\text{K}}$ Dokazujemo da vrijedi: "Ako postoji hrpa s parno mnogo graha i ukupan broj graha je $\leq k+1$, prvi igrač pobjeđuje."

Zaista, nek parna hrpa ima P graha. Prvi igrač pojede onu drugu hrpu, a prvu rastavi na 1, $P-1$. Ako je $P-1=1$, drugi je izgubio. Inače, drugi sad mora pojesti hrpu s jedim grahom, i rastaviti $P-1$ na dvije hrpe. Kako je $P-1$ neparan, jedna od te dvije hrpe će biti parna.

Sad je na potezu prvi igrač, postoji parna hrpa i ukupan broj graha je $\leq k-1$ (jer su bila bar dva pojedena graha), pa po $\boxed{\text{P}}$ prvi igrač pobjeđuje.

Shema indukcije u ovom zadatku je (radi preglednosti skicirana samo za $k=4$ i to za broj graha na hrpama $1,4$ ili $2,3$)

	1	2	3	4	...
1		B			
2	B				
3					
4					
...					

5. Fibonaccijev niz je dan s $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dokažite da vrijedi $F_{m+n} = F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n$, za sve $m, n \in \mathbb{N}$.

<u>rješenje:</u>

Ovdje možda nije posve očito što uzeti za bazu ili pretpostavku. Raspišimo zato izraz za $(m, n+1)$.

$$F_{m+(n+1)} = F_{m+n} + F_{m+n-1}$$

Kada bismo sada znali da tvrdnja vrijedi za (m, n) i $(m, n-1)$, sumande bismo mogli dalje raspisati

$$\begin{aligned} F_{m+n} + F_{m+n-1} &= F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n + F_m F_n + F_{m-1} F_{n-1} \\ &= F_m (F_{n+1} + F_n) + F_{m-1} (F_n + F_{n-1}) \\ &= F_m F_{n+2} + F_{m-1} F_{n+1} \end{aligned}$$

Drugim riječima, ako tvrdnja vrijedi za (m, n) i $(m, n-1)$, tada vrijedi i za $(m, n+1)$. Slično, ako pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za (m, n) i $(m-1, n)$, dobijemo da vrijedi i za $(m+1, n)$ jer imamo

$$\begin{aligned} F_{m+n} + F_{m+n-1} &= F_m F_{n+1} + F_{m-1} F_n + F_{m-1} F_{n+1} + F_{m-2} F_n \\ &= F_{n+1} (F_m + F_{m-1}) + F_n (F_{m-1} + F_{m-2}) \\ &= F_{m+1} F_{n+1} + F_m F_n \end{aligned}$$

Zapišimo sad indukciju formalno.

<u>prvi način</u>:

$\boxed{\text{B}}$ Da tvrdnja vrijedi za $(m, n) = (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)$ se lako provjeri ručno.

$\boxed{\text{P}}$ Neka tvrdnja vrijedi za (m, n) takve da je $m + n = k$ ili $m + n = k - 1$.

$\boxed{\text{K}}$ Dokazujemo da vrijedi i za (m, n) takve da je $m + n = k + 1$, pri čemu je $k \geq 4$ (manje slučajeve imamo u bazi).

Ako je $n > 2$, po $\boxed{\text{P}}$ imamo da vrijedi za $(m, n-1)$ i $(m, n-2)$, pa po gornjem računu znamo da vrijedi i za (m, n).

Ako je $n \leq 2$, tada je $m > 2$ jer je $k + 1 \geq 5$, pa po $\boxed{\text{P}}$ imamo da vrijedi za $(m-1, n)$ i $(m-2, n)$, pa po gornjem računu znamo da vrijedi i za (m, n).

Shema indukcije u ovom zadatku je (radi preglednosti skicirana samo za $k = 5$)

m \n	1	2	3	4	5	...
1	B	B	B			
2	B	B				
3	B					
4						
5						
...						

Primjetite da u bazi nismo morali ručno provjeravati $(1, 3)$ i $(3, 1)$, ali smo ovako dobili kraći zapis.

<u>drugi način</u>:

$\boxed{\text{B}}$ Tvrdnja za $m = 1$ postaje $F_{n+1} = F_1 F_{n+1} + F_0 F_n = 1 \cdot F_{n+1} + 0 \cdot F_n$, što vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$.

Tvrdnja za $m = 2$ postaje $F_{n+2} = F_2 F_{n+1} + F_1 F_n = 1 \cdot F_{n+1} + 1 \cdot F_n$, što vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$, po definiciji Fibonaccijevog niza.

$\boxed{\text{P}}$ Tvrdnja vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$ i $m = k$ ili $m = k - 1$.

$\boxed{\text{K}}$ Tvrdnja vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$ i $m = k + 1$.

U računu prije zapisa indukcije smo već pokazali da ako tvrdnja vrijedi za (k, n) i $(k - 1, n)$, da tada vrijedi i za $(k + 1, n)$, što upravo znači da iz $\boxed{\text{P}}$ zaključujemo $\boxed{\text{K}}$.

Shema indukcije u ovom zadatku je (radi preglednosti skicirana samo za $k = 2$)

m \n	1	2	3	4	5	...
1	B	B	B	B	B	
2	B	B	B	B	B	
3						
4						
...						

6. Neka su $a_1, \ldots, a_n > 0 \in \mathbb{R}$. Dokažite da je $\frac{a_1 + \ldots a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$.

rješenje:

$\boxed{\text{B}}$ Za $n = 2$ tvrdnja postaje $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ što je nakon sređivanja ekvivalentno s $(a - b)^2 \geq 0$, pa vrijedi.

$\boxed{\text{P}}$ Neka tvrdnja vrijedi za $n = k$.

$\boxed{\text{K}_1}$ Dokazujemo da vrijedi i za $n = 2k$.

$$\frac{a_1 + \ldots a_{2k}}{2k} = \frac{1}{2}\left(\frac{a_1 + \ldots a_k}{k} + \frac{a_{k+1} + \ldots a_{2k}}{k}\right).$$

Po $\boxed{\text{P}}$ sad imamo dalje

$$\geq \frac{1}{2}\left(\sqrt[k]{a_1 \ldots a_k} + \sqrt[k]{a_{k+1} \ldots a_{2k}}\right),$$

i sad ponovo kao u bazi dobivamo

$$\geq \sqrt[2k]{a_1 \ldots a_{2k}}.$$

$\boxed{\text{K}_2}$ Dokazujemo da vrijedi i za $n = k - 1$.

Označimo $A = \frac{a_1 + \ldots a_{k-1}}{k-1}$. Laki račun pokazuje da vrijedi $A = \frac{a_1 + \ldots + a_{k-1} + A}{k}$, pa po $\boxed{\text{P}}$ imamo

$$A \geq \sqrt[k]{a_1 \ldots a_{k-1} A}$$

što je ponovo nakon kratkog računa ekvivalentno s

$$A \geq \sqrt[k-1]{a_1 \ldots a_{k-1}}.$$

Shema indukcije u ovom zadatku je

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
	B															

Par napomena

- Neki od zadataka se prilično jednostavno daju riješiti drugim metodama (npr. 2. pomoću kongruencija, kao i nekoliko u idućem skupu zadataka), ovdje su samo jer su dobri za prezentaciju indukcije.

- Često ćete vidjeti da ukoliko je pretpostavka oblika $n = k$ da se radi o indukciji, a ako je pretpostavka oblika za sve $n \leq k$ (kao u 4. zadatku) da se radi o "jakoj indukciji". Ipak, često nam treba pretpostavka za $n = k$ i $n = k - 1$ ili $n = 1$, ili radimo inudkciju po dvije varijable, ili nešto treće pa nema baš smisla odvajati "jaku indukciju" kao zasebni pojam.

- Pokušajte riješiti 5. zadatak ako dopustite da je niz "dvostran", odnosno da je indeksiran cijelim brojevima - pokušajte precizno vidjeti što vam je baza a što pretpostavka.

- Pokušajte riješiti 3. zadatak ako je dana $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, rješenje je donekle slično. Probajte razmisliti o funkciji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - tzv. Cauchyjeva funkcijska jednadžba.

- Indukcija često dobro dođe kao zapis rješenja koje je "očito", kao u 4. zadatku. To je naprosto formalniji način za reći: "Prvi napravi $(P, ?) \to (N, N)$, pa onda drugi mora u (P, N) i sad prvi nastavlja dok može a drugi će u nekom trenu doći do $(1, 1)$".

- Obično je najbolja strategija pogledati kako bismo dokazali korak, pa vidjeti što nam točno treba od pretpostavke, te na samom kraju dokazati bazu. Taj uobičajeni tok razmišljanja je najbolje opisan u 5. zadatku.

Zadaci

1. Dokaži da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $11 | 23^n - 1$.
2. Niz je definiran s $a_1 = 5$, $a_2 = 13$, $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$, za sve $n \in \mathbb{N}$. Dokaži da je $a_n = 2^n + 3^n$, za sve $n \in \mathbb{N}$.
3. Dokaži da je broj dijagonala u konveksnom n-terokutu $\frac{n(n-3)}{2}$.
4. Dokaži da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $3 | n^3 + 2n$.
5. Dokaži da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $7 | 11^n - 4^n$.
6. Dokaži da za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ vrijedi $3^n > 2^{n+1}$.
7. Dokaži da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $1 + 3 + \ldots + (2n-1) = n^2$.
8. Dokaži da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoje $a, b, c \in \mathbb{N}$ takvi da je $a^2 + b^2 + c^2 = 14^n$.
9. Dokaži: $\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \ldots + \sqrt{1 + \frac{1}{2015^2} + \frac{1}{2016^2}} = 2016 - \frac{1}{2016}$.
10. Niz je definiran s $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = (2n+1)a_{n-1} - (n^2-1)a_{n-2}$, za sve $n \geq 3$. Pronađi opći član niza a_n.
11. Izračunaj $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \ldots + 2016 \cdot 2^{2015}$.
12. Izračunaj $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + 2016 \cdot 2016!$
13. Dokaži da za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$ vrijedi $\frac{1}{2} < \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{2n} < 1$.
14. Ako su $(a_1, \ldots, a_n)$ relativno prosti (ne nužno u parovima), dokažite da postoje cijeli brojevi $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, svi različiti od nule takvi da je $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n = 2016$.
15. Dokaži da za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ vrijedi $\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{\ldots\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}}} < 3$.
16. Dano je $n > 1$ pravaca u ravnini u općem položaju. Dokaži da je moguće upisati $x \in \mathbb{Z}$, $x \neq 0$, $|x| \leq n$ u svaki dio ravnine određen tim pravcima tako da je suma svih brojeva s bilo koje strane bilo kojeg pravca nula.
17. Dokaži da ako maknemo bilo koje polje ploče $2^n \times 2^n$, ostatak je moguće prekriti s L-triominama (domina od 3 polja u obliku slova L, dopušteno ju je reflektirati i rotirati).
18. Je li moguće upisati prirodne brojeve u "četvrtinu" beskonačne šahovske ploče tako da se svaki broj pojavljuje u svakom retku i stupcu točno jednom?
19. Dan je skup X i šest njegovih tročlanih podskupova. Dokaži da je moguće obojati elemente iz X tako da nijedan od šest podskupova nije jednobojan.

20. Na jednakostraničnom trokutu XYZ je nacrtana mreža na sljedeći način: Dužine XY, YZ i ZX podijeljene su na n jednakoih dijelova, te su pospajani svi parovi novodobivenih $3n-3$ točaka takvi da je dužina koja ih spaja paralelna s nekom od 3 stranice trokuta. 3 osobe, A, B i C kreću se po mreži na sljedeći način: Svatko kreće iz jednog vrha trokuta. Uvijek se pomaknu točno za jednu punu duljinu stranice malog trokuta u mreži. Prvo se pomiče A, zatim B pa C pa opet A itd. Dok se kreću, farbaju mrežu u crveno. Nitko ne smije preći preko crvene duljine, ali smiju stati u crvenu točku, štoviše, smije više od jedne osobe biti u jednoj točki istovremeno. Mogu li na ovaj način ofarbati cijelu mrežu u crveno?

21. Neka je $A \subseteq S = \{1, 2, \dots, 1000000\}$ skup koji sadrži 101 element. Dokaži da postoje $t_1, \dots t_{100} \in S$ takvi da su skupovi $A_i = \{x + t_i \mid x \in A\}$, za $i = 1, \dots, 100$, u parovima disjunktni.

22. Za $k \in \mathbb{N}$, neka je $p(k)$ najmanji prosti broj koji ne dijeli k, a $q(k)$ produkt svih prostih brojeva manjih od $p(k)$ (ako je $p(k) = 2$, tada je $q(k) = 1$). Zadan je niz $x_0 = 1$, $x_{n+1} = \frac{x_n p(x_n)}{q(x_n)}$, za $n \geq 0$. Odredi sve $n \in \mathbb{N}$ za koje je $x_n = 111111$.

23. Skakavac skače po cijelim brojevima krećući iz 0 u desno. Na raspolaganju su mu skokovi duljine $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$, svi različiti. Skakavac želi doći u polje $M = a_1 + \ldots + a_n$, tako da svaki od skokova iskoristi točno jednom. Na nekih $n-1$ polja iz skupa $\{1, 2, \dots, M-1\}$ nalazi se mina. Dokaži da skakavac može doći do polja M tako da izbjegne sve mine.

Hintovi

1. $\boxed{\text{B}}\ n=1$, $\boxed{\text{P}}\ n=k$, $\boxed{\text{K}}\ n=k+1$.
2. $\boxed{\text{B}}\ n=1$, $\boxed{\text{P}}\ n=k+1$, $\boxed{\text{K}}\ n=k+2$.
3. $\boxed{\text{B}}\ n=3$, $\boxed{\text{P}}\ n=k$, $\boxed{\text{K}}\ n=k+1$. $f(n+1)=f(n)+n-1$.
4. $\boxed{\text{B}}\ n=0,1,2$, $\boxed{\text{P}}\ n=k$, $\boxed{\text{K}}\ n=k+3$.
5. $\boxed{\text{B}}\ n=1$, $\boxed{\text{P}}\ n=k$, $\boxed{\text{K}}\ n=k+1$.
6. $\boxed{\text{B}}\ n=2$, $\boxed{\text{P}}\ n=k$, $\boxed{\text{K}}\ n=k+1$.
7. $\boxed{\text{B}}\ n=1$, $\boxed{\text{P}}\ n=k$, $\boxed{\text{K}}\ n=k+1$.
8. $\boxed{\text{B}}\ n=2$, $\boxed{\text{P}}\ n=k$, $\boxed{\text{K}}\ n=k+2$. $1^2+2^2+3^2=14$, $12^3+6^2+4^2=14^2$.
9. $a_n=n-\frac{1}{n}$. $\boxed{\text{B}}\ n=2$, $\boxed{\text{P}}\ n=k$, $\boxed{\text{K}}\ n=k+1$.
10. $a_n=n!$. $\boxed{\text{B}}\ n=1,2$, $\boxed{\text{P}}\ n=k-1,k-2$, $\boxed{\text{K}}\ n=k$.
11. $a_n=(n-1)2^n+1$. $\boxed{\text{B}}\ n=1$, $\boxed{\text{P}}\ n=k$, $\boxed{\text{K}}\ n=k+1$.
12. $a_n=(n+1)!-1$. $\boxed{\text{B}}\ n=1$, $\boxed{\text{P}}\ n=k$, $\boxed{\text{K}}\ n=k+1$.
13. Lijevo lagano, desno indukcijom $S_{n+1}<S_n$.
14. Zapravo, postoje (λ_i) tako da je $\sum\lambda_i a_i=M(a_1,\ldots,a_n)$. Za $n=2$ ovo je poznata tvrdnja iz teorije brojeva - ako ju ne znate, pokušajte dokazati!
15. Pokažite $\sqrt{m\sqrt{(m+1)\sqrt{\ldots\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}}}<m+1$. $\boxed{\text{B}}\ m=n$, $\boxed{\text{P}}\ m=k+1$, $\boxed{\text{K}}\ m=k$.
16. Pokažite indukcijom da je moguće ofarbati područja u 2 boje tako da su svaka dva susjedna polja različite boje. U svako polje upišite broj vrhova tog polja s predznakom plus ili minus, zavisno o boji polja.
17. Pokrijte centralna 3 polja L-triominom.
18. Da.
19. Dokažite prvo za $|X|=6$ pa induktivno povećavajte kardinalitet skupa X.
20. Da.
21. Definirajte $D=\{x-y\mid x,y\in A\}$. Izaberite 100 elemenata iz D induktivno.
22. Pokažite indukcijom da je $x_n=p_0^{c_0}\cdot p_1^{c_1}\cdot\ldots$, gdje je n u bazi 2 oblika $c_0+2c_1+4c_2+\ldots$, a $p_0=2,p_1=3,p_2=5,\ldots$ prosti brojevi.
23. $\boxed{\text{B}}\ n=1$, $\boxed{\text{P}}\ n=k$, sa bilo kojih $b_1,\ldots,b_n$ i $n-1$ minom može preći do $\sum b_i$. $\boxed{\text{K}}\ n=k+1$, pogledajte najveći a_k i dva slučaja: ako u prvih a_k uključno ima mina, a ako nema pogledajte prvu minu te a_k polja prije nje.