Ljetne pripreme 2016 – Dvostruko prebrojavanje

Azra Tafro

Dvostruko prebrojavanje

Ideja "dvostrukog prebrojavanja" je uočiti neki element problema (često uređene parove ili uređene trojke) na dva različita načina te iz jednakosti tih izraza doći do traženog zaključka.

Oznake:

- $P_k^n = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ - broj uređenih k-torki međusobno različitih elemenata n-članog skupa (k-permutacije)
- $C_k^n = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$ - broj k-članih podskupova međusobno različitih elemenata n-članog skupa (k-kombinacije)

Dokaži sljedeće tvrdnje koristeći kombinatorne argumente:

1. $C_k^n = C_{n-k}^n$
2. $P_k^n = nP_{k-1}^{n-1}$
3. $P_k^{n+1} = P_k^n + kP_{k-1}^n$
4. $\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$
5. $\sum_{k=0}^r \binom{m}{k}\binom{n}{r-k} = \binom{m+n}{r}$
6. $\sum_{i=0}^n i\binom{n}{i} = n2^{n-1}$
7. $\sum_{r=k}^n \binom{n}{r}\binom{r}{k} = 2^{n-k}\binom{n}{k}$
8. $C_k^n = C_{k-1}^{n-1} + C_k^{-1}$.

Zadaci za vježbu:

1. 15 učenika sudjeluje na ljetnoj školi. Svaki dan troje od njih čiste učionicu nakon nastave, nastava traje k dana, a svaki par učenika zajedno čisti učionicu točno jednom. Odredi k. (Rj: 15.)
2. U nekom odboru, svaki član sudjeluje u radu točno tri pododbora, a svaki pododbor ima točno tri člana. Dokaži da je broj članova odbora jednak broju pododbora.
3. Neka je $p_n(k)$ broj permutacija skupa $\{1, 2, \dots, n\}$, $n \geq 1$ koje imaju točno k fiksnih točaka (i je fiksna točka ako se broj i nalazi na i-tom mjestu u permutaciji). Dokaži da vrijedi

$$\sum_{k=0}^n kp_n(k) = n!.$$

4. Na svako polje ploče $n \times n$ upisan je broj koji je jednak broju pravokutnika koji sadrže to polje. Odredite sumu svih upisanih brojeva. (Rj: $\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\right)^2$.)

5. Na matematičkom natjecanju sudjeluje 200 učenika. Natjecanje se sastoji od 6 zadataka, i svaki zadatak riješilo je barem 120 učenika. Dokaži da postoje dva učenika takva da je svaki zadatak riješio barem jedan od njih.

6. U školi je 2007 učenika i 2007 učenica. Svaki učenik ili učenica učlanjen je u najviše 100 školskih klubova, a za svakog učenika i učenicu postoji barem jedan klub u kojem su oboje članovi. Dokaži da postoji klub u koji je učlanjeno barem 11 učenika i barem 11 učenica.

7. Na fakultet je upisan 10001 student. Neki studenti učlanjeni su u klubove (moguće je da je jedan student član više klubova), a neki klubovi udruženi su u društva (moguće je da jedan klub pripada u više društava). Ukupno postoji k društava te vrijedi:

   - Svaki par studenata učlanjen je u točno jedan isti klub.
   - Za svakog studenta i svako društvo, postoji točno jedan klub takav da je student član tog kluba, a klub dio tog društva.
   - Svaki klub ima neparan broj članova. Nadalje, ako klub ima $2m + 1$ članova, taj klub je dio točno m društava.

   Odredi sve moguće vrijednosti k. (Rj: $k = 5000$.)

8. Neka su n i k prirodni brojevi te neka je S skup od n točaka u ravnini za koje vrijedi:

   - Nikoje tri točke iz S nisu kolinearne,
   - Za svaku točku P iz S postoji barem k točaka iz S koje su jednako udaljene od P.

   Dokaži da vrijedi $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

   (Uputa: Zadanu nejednakost treba pretvoriti u ekvivalentnu cjelobrojnu nejednakost koju je moguće kombinatorno obrazložiti.)

0.1 Bijekcije

Dva skupa imaju jednak broj elemenata ako postoji bijekcija između njih. **Zadaci za vježbu**

1. Odredi broj šetnji po cjelobrojnoj mreži od $(0, 0)$ do (m, n) pri čemu su dozvoljeni pomaci za 1 udesno i prema gore. (Rj: $\binom{m+n}{n}$.)

2. Odredi broj šetnji po cjelobrojnoj mreži od $(0, 0)$ do (n, n) pri čemu su dozvoljeni pomaci za 1 udesno i prema gore, tako da za sve točke (x, y) u šetnji vrijedi $x \geq y$. (Rj: $\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, tj. n-ti Catalanov broj.)

3. Neka su n i k prirodni brojevi. Dokaži da je broj particija broja n u točno k dijelova jednak broju particija broja n u kojima je najveći pribrojnik jednak k. (Rj: Ferrarov dijagram.)

4. Dokaži da je broj particija broja n na različite pribrojnike jednak broju particija broja n na neparne pribrojnike. (Napomena: jednočlana particija $n = n$ se također smatra particijom.)