Nizovi

Isprobavanje

1. Odredite opći član niza zadanog s $x_0 = 3, x_1 = 4$ i $x_{n+1} = x_{n-1}^2 - nx_n$.

2. Niz (a_n) zadovoljava relaciju

$$a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n})$$

za sve $m \geqslant n \geqslant 0$. Ako je $a_1 = 1$, odredite a_{2016}.

3. Niz (u_n) zadan je s $u_0 = u_1 = u_2 = 1$ i

$$u_{n+3}u_n - u_{n+2}u_{n+1} = n!, \quad n \geqslant 0.$$

Dokažite da je u_n cijeli broj, za svaki $n \in \mathbb{N}$.

4. Niz (x_n) zadan je rekurzivno s $x_0 = a$, $x_1 = b$ i

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{1}{x_n}\right).$$

Ako je poznato da je (x_n) periodičan, dokažite da vrijedi $ab = 1$.

Indukcija

5. Neka je (a_n) niz pozitivnih realnih brojeva takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3 = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2.$$

Dokažite da je tada $a_n = n, \forall n \in \mathbb{N}$.

6. Neka je n prirodan broj, te $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ i $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$ dva niza realnih brojeva tako da vrijedi

$$\sum_{j=1}^{i} a_j \leq \sum_{j=1}^{i} b_j$$

za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$ i $\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n} b_j$. Pretpostavimo da se za realni broj m broj parova (i, j) takvih da je $a_i - a_j = m$ podudara s brojem parova (k, l) takvih da je $b_k - b_l = m$. Dokaži da je $a_i = b_i$, za $i = 1, 2, \ldots, n$.

Linearne rekurzije

7. Izvedite zatvorenu formulu za $n-$ti član Fibonaccijevog niza.

8. Niz u_n je zadan s $u_0 = 2$, $u_1 = \frac{5}{2}$,

$$u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2 - 2) - u_1.$$

Dokažite da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\lfloor u_n \rfloor = 2^{(2^n - (-1)^n)/3}.$$

Uoči Fibonaccija

9. Promotrimo nizove (a_n) i (b_n) zadane sljedećim rekurzivnim relacijama:

$$\begin{array}{llll} a_0 = 0, & a_1 = 2, & a_{n+1} = 4a_n + a_{n-1}, & n \geqslant 0 \\ b_0 = 0, & b_1 = 1, & b_{n+1} = a_n - b_n + b_{n-1}, & n \geqslant 0 \end{array}$$

Dokažite da je $(a_n)^3 = b_{3n}$.

10. Niz pozitivnih realnih brojeva definiran je s $a_0 = 1$, $a_{n+2} = a_n - a_{n+1}$. Pokažite da smo ovako doista "dobro definirali" (na jedinstven način odredili) niz.

Limesi u tragovima

11. Nađite zatvorenu formulu za opći član niza zadanog s $a_1 = 2$ i

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}.$$

Još malo preslagivanja

12. Neka je (a_n) niz realnih brojeva za koji vrijedi $a_{n+1} = 4a_n(1-a_n)$. Za koliko različitih početnih vrijednosti a_1 se postiže $a_{2013} = 0$?

13. Dva niza prirodnih brojeva a_1,a_2,a_3,... i b_1,b_2,b_3,... zadovoljavaju jednadžbu

$$(a_n - a_{n-1})(a_n - a_{n-2}) + (b_n - b_{n-1})(b_n - b_{n-2}) = 0$$

za svaki cijeli broj $n \geqslant 2$. Dokaži da postoji cijeli broj k takav da je $a_k = a_{k+2016}$.

14. Dva niza realnih brojeva definirana su na sljedeći način: $x_1 = y_1 = \sqrt{3}$,

$$x_{n+1} = x_n + \sqrt{1 + x_n^2} \qquad y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + \sqrt{1 + y_n^2}}$$

Dokažite da $\forall n > 1$ vrijedi $2 < x_n y_n < 3$.