IMO pripreme 2016 – Nizovi

Petar Bakić

23. 6. 2016.

Uvodni primjeri

1. Niz (x_n) zadan je rekurzivno s $x_0 = a$, $x_1 = b$ i

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{1}{x_n}\right).$$

Ako je poznato da je (x_n) periodičan, dokažite da vrijedi $ab = 1$.

2. Nađite zatvorenu formulu za opći član niza zadanog s $a_1 = 2$ i

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}.$$

3. Niz (u_n) je zadan s $u_0 = 2$, $u_1 = \frac{5}{2}$,

$$u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2 - 2) - u_1.$$

Dokažite da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\lfloor u_n \rfloor = 2^{(2^n - (-1)^n)/3}.$$

Zadaci

1. Niz a_n je definiran s $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 24$ i

$$a_n = \frac{6a_{n-1}^2 a_{n-3} - 8a_{n-1}a_{n-2}^2}{a_{n-2}a_{n-3}}, \quad \text{za } n \geqslant 4.$$

Pokažite da je a_n djeljiv s $n!$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

2. Neka je $1, 2, 3, \ldots, 2016, 2017, 2019, 2022, \ldots$ niz definiran s $x_k = k$ za $k = 1, 2, \ldots, 2016$ i $x_{k+1} = x_k + x_{k-2015}$ za $k \geqslant 2016$. Pokažite da u ovom nizu možemo naći 2015 uzastopnih članova djeljivih s 2016.

3. Niz (x_n) zadan je s $x_0 = 1$ i $x_{n+1} = 3x_n + \lfloor x_n\sqrt{5} \rfloor$.
Imamo $x_1 = 5, x_2 = 26, x_3 = 136, x_4 = 712, \ldots$ Odredite zatvorenu formulu za opći član niza.

4. Neka je $a_1, a_2, \ldots$ niz nenegativnih cijelih brojeva takav da za svaki izbor m, n vrijedi
$$\sum_{i=1}^{2m} a_{in} \leqslant m.$$
Pokažite da postoje k, d takvi da vrijedi
$$\sum_{i=1}^{2k} a_{id} \leqslant k - 2016.$$

5. Za $n \in \mathbb{N}$ i $c \in \mathbb{R}$ definiramo niz (x_n) rekurzivno s $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ i
$$x_{k+2} = \frac{cx_{k+1} - (n-k)x_k}{k+1}, \quad \text{za } k \geqslant 0.$$
Neka je, za fiksni n, c najveći broj takav da je $x_{n+1} = 0$. Nađite formulu za x_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ u terminima n i k.

DZ

1. Promotrimo nizove (a_n) i (b_n) zadane sljedećim rekurzivnim relacijama:
$$\begin{array}{llll} a_0 = 0, & a_1 = 2, & a_{n+1} = 4a_n + a_{n-1}, & n \geqslant 0 \\ b_0 = 0, & b_1 = 1, & b_{n+1} = a_n - b_n + b_{n-1}, & n \geqslant 0 \end{array}$$
Dokažite da je $(a_n)^3 = b_{3n}$.

2. Niz (a_n) zadan je s $a_1 = \frac{1}{3}$ i
$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 + a_n + 1} \quad \text{za } n \geqslant 1.$$
Pokažite da vrijedi $a_1 + \cdots + a_n < 1, \forall n$.

3. Nizovi (a_n) i (b_n) zadani su s $a_1 = 1, b_1 = 2$,
$$a_{n+1} = \frac{1 + a_n + a_n b_n}{b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{1 + b_n + b_n a_n}{a_n}.$$
Dokažite $a_{2016} < 5$.

4. Definiramo niz (a_n) rekurzivno s $a_0 = 1$ i $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a_k$ za $n \geqslant 1$. Neka je $m \in \mathbb{N}$, p prost te neka su q i r nenegativni cijeli brojevi. Pokažite da vrijedi
$$a_{p^m q + r} \equiv a_{p^{m-1} q + r} \pmod{p^m}.$$