

IMO pripreme 2016 – Funkcijske jednadžbe

sastavio: Tonći Kokan

13. 6. 2016.

1. zadatak: Nađi sve funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takve da za sve realne brojeve x i y vrijedi:

$$f(f(x) - y^2) = f(x^2) + y^2 f(y) - 2f(xy).$$

2. zadatak: Nađi sve funkcije $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ takve da za sve pozitivne realne brojeve x , y i z vrijedi:

$$(z + 1)f(x + y) = f(xf(z) + y) + f(yf(z) + x).$$

3. zadatak: Nađi sve funkcije $f: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ takve da za sve nenegativne realne brojeve x i y vrijedi:

$$f\left(\frac{x + f(x)}{2} + y\right) = 2x - f(x) + f(f(y)).$$

4. zadatak: Nađi sve neopadajuće funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takve da je $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ te da za sve $x < 1$ i $y > 1$ vrijedi:

$$f(x) + f(y) = f(x)f(y) + f(x + y - xy).$$