Nestandardna ograničavanja

Uvod

U matematici se često pojavljuje potreba za ograničavanjem nekih vrijednosti koje ili ne znamo izračunati ili je egzaktan izraz prekompliciran za računanje. Cilj ovog predavanja je pokazati kroz natjecateljske zadatke razne tehnike ograničavanja. Rješenja zadataka nalaze se iza svih zadataka radi toga da čitatelj može o svakom zadatku dobro promisliti prije nego pročita rješenje.

Iako se svi se zadaci u ovoj skripti mogu elementarno riješiti (koristeći samo teoriju potrebnu za IMO), u nekim rješenjima, kako bi proširili skup alata kojima se možemo služiti kod dokazivanja ograda u nejednakostima, korištšteni su nekima možda nepoznati teoremi. Ukoliko čitatelj nije upoznat s teorijom potrebnom za iskaz teorema, može preskočiti napisane teoreme i prijeći na rješavanje zadataka budući da oni nisu nužni za rješavanje.

Teorija

Sljedeći teorem koristit ćemo samo u slučaju kad je f polinom, međutim iskazat ćemo ga u najopćenitijem obliku radi potpunosti.

Teorem 1 (Taylorov teorem). *Neka je $I \subset \mathbb{R}$ otvoren interval i neka $f : I \to \mathbb{R}$ ima $n+1$ derivaciju na I. Neka je $c \in I$. Tada za svaki $x \in I$ postoji c_x, između c i x takav da je:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} + \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

Naredni teorem manje je poznat, ali vrlo koristan kod provjeravanja pozitivnosti polinoma na nekom intervalu. Neka je $a_1, a_2, \ldots, a_n$ niz realnih brojeva. **Brojem promjena predznaka** toga niza nazivamo broj koji nam kaže koliko puta se u tom nizu (čitajući ga u danom poretku) promijenio predznak brojeva od pozitivnog u negativan i iz negativnoga u pozitivan, zanemarivši nule. Npr. niz 1,-2,0,3,0,1,-1 ima 3 promjene predznaka.

Teorem 2 (Descartesovo pravilo). *Neka je $a_0, a_1, \ldots, a_n$ niz realnih brojeva, neka je r broj promjena predznaka u danom nizu i $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots a_n x^n$ polinom. Broj pozitivnih nultočaka (brojeći kratnost) polinoma $P(x)$ jednak je $r - 2k$, gdje je k neki nenegativan cijeli broj.*

Korolar. Broj negativnih nultočaka (brojeći kratnost) polinoma $P(x)$ jednak je broju promjena predznaka u nizu $a_0, -a_1, a_2, \ldots, (-1)^n a_n$

U jednom od rješenja koristi se pojam integrala pa ćemo, radi lakšeg praćenja navesti osnovna svojstva integrala koja se koriste u dokazu.

Teorem 3 (Svojstva integrala)**.** *Neka su $a < b$ realni brojevi i $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funkcije integrabilne na $[a, b]$. Tada vrijede sljedeća svojstva:*

- *Neka je $c \in [a, b]$. Tada vrijedi $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.*
- *Ako je $f(x)$ nenegativna (nepozitivna) $[a, b]$, tada je $\int_a^b f(x)dx$ nenegativan (nepozitivan) realan broj.*
- *Za proizvoljne $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vrijedi $\int_a^b \alpha f(x)+\beta g(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx+\beta \int_a^b g(x)dx$*
- *$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, gdje je $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ funkcija takva da je $F'(x) = f(x)$ za svaki x iz $[a, b]$. Nadalje, ako je G neka druga funkcija takva da je $G' = f$ na $[a, b]$, onda postoji $C \in \mathbb{R}$ takav da je $F - G = C$.*

Prve tri navedene tvrdnje postaju intuitivne ako shvatimo integral kao orjentiranu površinu ispod krivulje. Četvrta tvrdnja zove se *Newton-Leibnizova formula*, a funkciju F nazivamo primitivnom funkcijom od f. U ovom predavanju tu formulu koristimo isključivo za $f(x) = x^n$. Naime, primjetimo da je $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$, tj. $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ je primitivna funkcija od f pa po Newton-Leibnizovoj formuli vrijedi $\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$
Ovime smo iskazali sve nepoznate tvrdnje koje ćemo koristiti i možemo prijeći na primjere.

Riješeni zadaci

1. (IMO SL 1981) Neka su $a, b, c, d, e, f, g \geq 0$ takvi da je $a+b+c+d+e+f+g = 1$. Odredi najmanju moguću vrijednost izraza:
$$\max\{a + b + c, b + c + d, c + d + e, d + e + f, e + f + g\}$$
2. Je li niz $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ zadan s $a_n = \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{\cdots + \sqrt{n}}}}$ ograničen?
3. (IMO SL 2001) Neka je $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ niz pozitivnih realnih brojeva. Dokaži da nejednakost $1 + a_n > a_{n-1}\sqrt[n]{2}$ vrijedi za beskonačno mnogo $n \in \mathbb{N}$.
4. (IMO SL 2006) Niz realnih brojeva $a_0, a_1, \ldots a_n$ zadan je rekurzivno s: $a_0 = -1$ i
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k+1} = 0$$
za $n \geq 1$. Dokaži da je $a_n > 0$ za sve $n \geq 1$.
5. (IMO SL 2007) Zadan je realan broj $c > 2$ i $(a(n))_{n=1}^{\infty}$ niz nenegativnih realnih brojeva takvih da je $a(m + n) \leq 2 \cdot a(m) + 2 \cdot a(n)$ i $a(2^k) \leq \frac{1}{(k+1)^c}$. Dokaži da je niz ograničen.
6. (Putnam 2014) Zadan je niz nenegativnih realnih brojeva $a_0, a_1, \ldots, a_n$ takvih da vrijedi $\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} ka_k = 1$, $\sum_{k=0}^{n} k^2 a_k = 2$ i $\sum_{k=0}^{n} k^3 a_k = 5$. Odredi najmanju moguću vrijednost od a_0.

Rješenja

1. Označimo $M = \max\{a+b+c, b+c+d, c+d+e, d+e+f, e+f+g\}$. Tada vrijedi: $3M \geq (a+b+c)+(c+d+e)+(e+f+g) = 1+2c+2e \geq 1$, tj. $M \geq \frac{1}{3}$. Jednakost se može postići npr. za $a = d = g = \frac{1}{3}$ i $b = c = e = f = 0$.

2. Za fiksan n dokažimo indukcijom "u nazad" da za svaki $m \leq n$ vrijedi:

$$\sqrt{m + \sqrt{m+1+\dots\sqrt{n}}} < \sqrt{m} + 1$$

Baza ($m = n$) očito vrijedi pa ostaje dokazati korak. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za svaki $m > k$ i želimo dokazati da onda vrijedi i za k:

$$\sqrt{k + \sqrt{k+1+\dots\sqrt{n}}} < \sqrt{k + \sqrt{k+1} + 1} < \sqrt{k + 2\sqrt{k} + 1} = \sqrt{k} + 1$$

Ovime je dokazan korak indukcije pa stavljajući $m = 2$ dobivamo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $a_n < \sqrt{2} + 1$.

3. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji neki $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n > n_0$ vrijedi $a_n \leq a_{n-1}\sqrt[n]{2}$. Tada iz A-G nejednakosti dobivamo:

$$a_n \leq a_{n-1}\sqrt[n]{2} < a_{n-1} \cdot \frac{n+1}{n}$$

što je dalje ekvivalentno s:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{a_n}{n+1} < \frac{a_{n-1}}{n}$$

Teleskopiranjem slijedi da za sve $n > m > n_0$ vrijedi:

$$\frac{a_m}{m+1} - \frac{a_n}{n+1} > \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k+1}$$

Kako na desnoj strani imamo harmonijski red, za koji znamo da divergira,ako fiksiramo m, posljednja nejednakost implicira da je $\frac{a_m}{m+1}$ veće od svakog realnog broja, što je besmislica. Dakle, pretpostavka je bila kriva i time je dokaz završen.

4. *Prvo rješenje.* Indukcija! Za $n = 1$ nejednakost očito vrijedi pa pretpostavimo da vrijedi za sve brojeve manje od nekog $n \in \mathbb{N}$ i dokažimo da vrijedi za $n + 1$. Iz uvjeta zadatka imamo:

$$(n+1)a_n + \frac{n+1}{2}a_{n-1} + \dots + a_0 = 0 \quad \text{i} \quad (n+2)a_{n+1} + \frac{n+2}{2}a_n + \dots a_0 = 0$$

Oduzimajući prvu od druge jednakosti dobivamo:

$$(n+2)a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n+1}{n+1-i} - \frac{n+2}{n+2-i} \right) a_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{i a_i}{(n+1-i)(n+2-i)} > 0$$

gdje posljednja nejednakost vrijedi zbog pretpostavke indukcije.

Drugo rješenje. Definiramo $P_n(x) = a_n + a_{n-1}x + \dots + a_0x^n$. Tada je uvjet ekvivalentan s: $\int_0^1 P_n(x)dx = 0$, $\forall n \geq 1$ i primjetimo da vrijedi

$P_{n+1}(x) = a_{n+1} + xP_n(x)$. Integriranjem obje strane dobivamo da vrijedi: $a_{n+1} = -\int_0^1 xP_n(x)dx$ pa treba pokazati da je posljednji integral negativan za sve $n \geq 1$. Tvrdnja očito vrijedi za $n = 1$.Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve $m \leq n$ i dokažimo da vrijedi za $n + 1$. Po Descartesovom teoremu vrijedi da $P_n(x)$ ima najviše jednu pozitivnu nultočku, a kako je $\int_0^1 P_n(x)dx = 0$, on ima točno jednu nultočku i to u intervalu $(0, 1)$. Označimo je sa c. Očito je $P_n(0) > 0$ pa jedinstvenost nultočke implicira da je $P_n(x)$ pozitivan za $x < c$ i negativan za $x > c$. Sada imamo:

$$\int_0^1 xP_n(x)dx = \int_0^c xP_n(x)dx + \int_c^1 xP_n(x)dx < \int_0^c cP_n(x)dx + \int_c^1 cP_n(x)dx = 0$$

Dakle, $a_{n+1} > 0$ i time je tvrdnja zadatka dokazana.

5. Dokažimo najprije tvrdnju za $n = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^N$. Definirajmo brojeve $m_0 = 2^0$ i rekurzivno m_k kao sumu sljedećih 2^k potencija od 2 ako ih postoji toliko, odnosno sumu svih potencija do 2^N ako ih je ostalo manje. Preciznije, definiramo

$$m_k = \sum_{l=2^k-1}^{2^{k+1}-2} 2^l \cdot \mathbb{1}_{l \leq N}$$

i primjenimo sada prvi uvjet više puta na način:

$$\begin{aligned} a(n) &\leq 2a(m_0) + 2a(m_1 + \dots + m_{\lfloor \log_2(N+1) \rfloor}) \\ &\leq 2a(m_0) + 4a(m_1) + 4a(m_2 + \dots + m_{\lfloor \log_2(N+1) \rfloor}) \\ &\dots \\ &\leq 2a(m_0) + 4a(m_1) + \dots 2^{\lfloor \log_2(N+1) \rfloor + 1} a(m_{\lfloor \log_2(N+1) \rfloor}) \end{aligned}$$

Dakle, preostaje nam još ograditi $a(m_k)$. Međutim, to ćemo napraviti jednostavnim "rastavljanjem" m_k na 2 sume pa svake od njih na 2 sume itd. (dok ne dođemo do jednočlane sume) te primjenjivanjem prvog uvjeta zadatka. Tako ćemo svaki $a(2^j)$, za j takav da se 2^j nalazi u m_k pomnožiti s 2 najviše k puta (zapravo, točno k puta osim u zadnjem m_k koji ima možda manje od 2^k elemenata) pa vrijedi:

$$a(m_k) \leq 2^k \sum_{l=2^k-1}^{2^{k+1}-2} a(2^l)$$

Konačno, uvrštavajući ovo u prethodnu nejednakost i koristeći drugi uvjet zadatka, dobivamo:

$$a(n) \leq 2 \sum_{k=0}^{\lfloor \log_2(N+1) \rfloor} 2^k a(m_k) \leq 2 \sum_{k=0}^{\lfloor \log_2(N+1) \rfloor} 2^{2k} \sum_{l=2^k-1}^{2^{k+1}-2} a(2^l) \leq 2 \sum_{k=0}^{\lfloor \log_2(N+1) \rfloor} \sum_{l=2^k-1}^{2^{k+1}-2} 2^{2\log_2(l+1)} a(2^l)$$

$$\leq 2 \sum_{l=0}^{2N} (l+1)^2 a(2^l) \leq 2 \sum_{l=0}^{2N} \frac{1}{(l+1)^{c-2}}$$

Kako je red $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-r}$ konvergentan za svaki realan $r > 1$, on ima neku sumu S, tj. kako je to red pozitivnih članova, svaka njegova parcijalna suma je ograđena sa S. Dakle, za svaki n oblika $1 + 2 + \cdots + 2^N$ vrijedi $a(n) < 2S$. n-ove koji nisu tog oblika zapišemo u binarnom zapisu i primjenom gornjeg postupka na potencije broja 2 koje postoje u zapisu, zbog toga što je niz $a(2^l)$ padajuć, dobivamo da je $a(n)$ ograničen istom sumom kao i $a(m)$, gdje je $m \leq n$ broj dobiven tako da iz binarnog zapisa od n obrišemo nule (m tada ima oblik koji smo ograničili). Time smo dokazali da je $a(n) < 2S$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.

6. *Prvo rješenje.* Primjetimo da vrijedi:

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)^3 a_k = 1 + a_0$$

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 a_k = 1 - a_0$$

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1) a_k = a_0$$

Iz Cauchy-Schwarzove nejednakosti slijedi:

$$a_0(1+a_0) = \left(\sum_{k=1}^{n}(k-1)^3 a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}(k-1) a_k\right) \geq \left(\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 a_k\right)^2 = (1-a_0)^2$$

odakle dobivamo: $a_0(1 + a_0) \geq (1 - a_0)^2$, odnosno $a_0 \geq \frac{1}{3}$. Jednakost se postiže za $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{6}$ i $a_k = 0$ za $k \neq 1, 3$.

Drugo rješenje. Definirajmo funkciju izvodnicu (u ovom slučaju polinom) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Primjetimo da se uvjet zadatka može zapisati kao: $f(1) = f'(1) = f''(1) = f'''(1) = 1$ i treba odrediti najmanju moguću vrijednost od $f(0)$. Znamo iz Taylorovog teorema da proizvoljan x vrijedi

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{6}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x-1)^4$$

gdje je c realan broj između x i 1. Kako su svi članovi a_k nenegativni, to je i $f^{(4)}(x) \geq 0$ za svaki $x \geq 0$ pa uvrštavanjem $x = 0$ u gornju jednakost dobivamo:

$$f(0) = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{f^{(4)}(c)}{4!} \geq \frac{1}{3}$$

Dakle, $a_0 \geq \frac{1}{3}$, uz uvjet jednakosti $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{6}$ i $a_k = 0$ za $k \neq 1, 3$.

Zadaci za vježbu

1. Neka je $S \subseteq N$ takav da je zbroj svaka dva elementa iz S opet u S i neka je $\{a_1, \ldots, a_n\}$ skup svih prirodnih brojeva koji nisu u S. Dokaži da je $a_1 + \cdots + a_n \leq n^2$

2. (IMO SL 2002) Zadan je $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ niz realnih brojeva za koje postoji realan broj c takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $0 \leq a_n \leq c$. Ako za svake $i \neq j$ vrijedi $|a_i - a_j| \geq \frac{1}{i+j}$, dokaži da je $c \geq 1$.

3. (IMO SL 2013) Zadan je n prirodan broj i niz $a_1, \ldots, a_n$ prirornih brojeva. Proširimo niz do beskonačnog tako da definiramo da je $a_{n+i} = a_i$ za svaki $i \geq 1$. Ako vrijedi $a_1 \leq a_2 \leq \ldots a_n \leq a_1 + n$ i $a_{a_i} \leq n+1-i$ za $i = 1, 2, \ldots, n$, dokaži da je $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq n^2$.

4. (IMC 2010) Zadani su $a, b, c \in [-1, 1]$ takvi da je $1 + 2abc \geq a^2 + b^2 + c^2$. Dokaži da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi: $1 + 2(abc)^n \geq a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}$

5. (Kina 2014) Neka su $x_1, \ldots, x_n$ nenegativni realni brojevi takvi da je $x_i x_j \leq 4^{-|i-j|}$ za sve $i, j = 1, 2 \ldots, n$. Dokaži da je $x_1 + x_2 + \cdots + x_n < \frac{5}{3}$

6. Zadani su realni brojevi $a_1, \ldots, a_n > 0$. Dokaži da vrijedi:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1 + \cdots + a_k} < 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$$