Metode dokazivanja nejednakosti

Uvod

Cilj ovoga predavanja je prikazati razne tehnike za dokazivanje nejednakosti. U prvom će poglavlju kroz nekoliko primjera biti prikazana tehnika dokazivanja nejednakosti koristeći poznate nejednakosti. Nakon toga pokazat ćemo korist supstitucije u nejednakostima, te na kraju jake metode - metodu kontradikcije odnosno tehniku "Mixing variables". U daljnjem tekstu simboli $\sum$, odnosno $\prod$ označavaju cikličku sumu odnosno sumaciju.

Korištenje poznatih nejednakosti

Ova metoda zapravo je najstandardnija i daleko najčešća metoda dokazivanja nejednakosti na natjecanjima. Navest ćemo najprije neke standardne nejednakosti koje ćemo koristiti u dokazivanju i koje se na natjecanjima smatraju poznatima.

Teorem 1 (Nejednakosti sredina)**.** *Neka su $a_1, \ldots, a_n$ pozitivni realni brojevi. Definirajmo za svaki realan broj r:*

$$S_r(a_1, \ldots, a_n) := \sqrt[r]{\frac{a_1^r + a_2^r \cdots + a_n^r}{n}} \quad za \quad r \neq 0 \quad i \quad S_0 = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$$

Tada za realne brojeve $p < q$ vrijedi $S_p \leq S_q$. Uz jednakost kad je $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Teorem 2 (Cauchy-Schwarzova nejednakost)**.** *Neka su $a_1, \ldots, a_n$ i $b_1, \ldots, b_n$ realni brojevi. Tada vrijedi nejednakost:*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

Uz jednakost kad je $a_1 : a_2 : \ldots a_n = b_1 : b_2 : \ldots b_n$.

Teorem 3 (Hölderova nejednakost)**.** *Neka su $a_{i,j}$ $i = 1, 2 \ldots, m$, $j = 1, 2 \ldots, n$ pozitivni realni brojevi i $p_1, \ldots p_m > 1$ realni brojevi takvi da je $\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i} = 1$. Tada vrijedi:*

$$\prod_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^{p_i} \right)^{\frac{1}{p_i}} \geq \sum_{j=1}^{n} \prod_{i=1}^{m} a_{i,j}$$

Teorem 4 (Jensenova nejednakost)**.** *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija, $x_1, \ldots x_n$ i $a_1, \ldots, a_n > 0$ realni brojevi. Tada vrijedi:*

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^n a_i} \geq f\left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i x_i}{\sum_{i=1}^n a_i}\right)$$

Za f konkavnu funkciju, smjer nejednakosti je suprotan

Teorem 5 (Monotono preuređenje vektora)**.** *Neka su $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ i $b_1 \geq b_2 \cdots \geq b_n$ realni brojevi i neka je $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ permutacija. Tada vrijedi:*

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \sum_{i=1}^n a_i b_{\sigma(i)} \geq \sum_{i=1}^n a_i b_{n+1-i}$$

Teorem 6 (Čebiševljeva nejednakost)**.** *Neka su $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$ i $b_1 \geq b_2 \cdots \geq b_n$ realni brojevi. Tada vrijedi:*

$$n\sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n b_i \geq n\sum_{i=1}^n a_i b_{n+1-i}$$

Teorem 7 (Schurova nejdnakost)**.** *Neka su $a, b, c, r \geq 0$ realni brojevi. Tada vrijedi:*

$$a^r(a-b)(a-c) + b^r(b-a)(b-c) + c^r(c-a)(c-b) \geq 0$$

Najbolje ćemo prikazati korist pojedinih nejednakosti rješavanjem zadataka.

Zadaci

1. Zadani su $a, b, c \geq 0$, takvi da je $a + b + c = 3$. Dokažite da vrijedi:
$$a^2b + b^2c + c^2a + abc \leq 4$$

2. (IMO 2001) Zadani su $a, b, c > 0$. Dokažite da vrijedi:
$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$$

3. Zadani su $a, b, c \geq 0$ takvi da je $a + b + c = 3$. Dokažite da vrijedi:
$$abc(a^2 + b^2 + c^2) \leq 3$$

4. Zadani su $a, b, c > 0$ takvi da je $a^5 + b^5 + c^5 = 3$. Dokažite da vrijedi:
$$\frac{a^4}{b^3} + \frac{b^4}{c^3} + \frac{c^4}{a^3} \geq 3$$

5. Neka su a, b, c stranice trokuta. Dokažite da vrijedi:
$$(a + b - c)^a(b + c - a)^b(c + a - b)^c \leq a^a b^b c^c$$

6. Zadani su $a, b, c > 0$ takvi da je $abc = 1$. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{1}{a^2+a+1} + \frac{1}{b^2+b+1} + \frac{1}{c^2+c+1} \geq 1$$

Hintovi

1. BSO pretpostavimo da se b nalazi između a i c, tj. $(b-a)(b-c) \leq 0$. Nakon korištenja pretpostavke nejednakost postaje $b(a+c)^2 \leq 4$. Ovo se lako dokaže AG-om.

2. Hölderova nejednakost daje:

$$\left(\sum \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}\right)^2 \cdot \sum a(a^2+8bc) \geq (a+b+c)^3$$

3. Poznato je da vrijedi $3abc(a+b+c) \leq (ab+ac+bc)^2$ i zatim iskoristite AG na 3 člana.

4. Primjenite težinsku AG nejednakost za pogodno odabran C:

$$\sum \left(\frac{a^4}{b^3} + Ca^{10} + 2Ca^5b^5\right) \geq \dots$$

5. Supstitucijom $a = y+z$, $b = x+z$, $c = x+y$ nejednakost postaje:

$$\prod \left(\frac{z}{y+z}\right)^{y+z} \leq 1$$

   i zatim primjenite težinski AG na lijevu stranu

6. Supstitucija $a = \frac{yz}{x^2}$, $b = \frac{xz}{y^2}$, $c = \frac{xy}{z^2}$ i zatim Cauchy-Schwarzova nejednakost.

Metoda supstitucije

Metodu supstitucije koristimo vrlo često kako bismo se riješili kompliciranog uvjeta ili u slučaju kad primjetimo nekakvu povezanost među članovima u zadanoj nejednakosti. Postoje neki standardni trikovi kako se riješiti određenih uvjeta u nejednakostima. Pokažimo to na nekoliko primjera. Više primjera supstitucije bit će izloženo u sljedećem poglavlju, gdje se ta metoda povezuje sa jakom metodom kontradikcije.

1. Neka su $a, b, c \geq 0$ takvi da je $a^2+b^2+c^2+abc = 4$. Dokažite da vrijedi

$$a+b+c \leq 3$$

2. Neka su a, b, c u parovima različiti realni brojevi. Dokažite da vrijedi

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2 \geq 2$$

3. (IMO 2008) Zadani su realni brojevi x, y, z različiti od 1, takvi da je $xyz = 1$. Dokažite da vrijedi:

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

i zatim pokažite da jednakost vrijedi za beskonačno mnogo racionalnih brojeva x, y, z, takvih da je $xyz = 1$.

Hintovi

1. $a = 2\cos\alpha, b = 2\cos\beta, c = 2\cos\gamma$, gdje je $\alpha+\beta+\gamma = \pi$ ili druga mogućnost $a = \sqrt{\dfrac{yz}{(x+y)(x+z)}}$, $b = \ldots$, gdje su $x, y, z > 0$
2. Uz supstituciju $x = \frac{a+b}{a-b}, y = \ldots$ primjetimo da vrijedi $(x-1)(y-1)(z-1) = (x+1)(y+1)(z+1)$ i zapišimo nejednakost kao kvadrat nekog izraza.
3. Uz supstituciju $a = \frac{x}{x-1}, b = \ldots$ primjetimo da vrijedi

   $$abc = (a+1)(b+1)(c+1)$$

   i zapišimo nejednakost kao kvadrat nekog izraza.

Metoda kontradikcije

Metodu kontradikcije često koristimo u paru sa supstitucijom kako bismo, neformalno rečeno, zamijenili uvjet nejednakosti i nejednakost. Pokažimo ideju metode na nekoliko primjera:

1. Neka su $a, b, c \geq 0$ takvi da je $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Dokažite da vrijedi

   $$a + b + c \geq 3$$

   Rješenje. Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da postoje $a, b, c \geq 0$ takvi da je $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ i $a + b + c < 3$. Tada postoji $t < 1$ takav da je $at + bt + ct = 3$. Međutim, tada zbog $t < 1$ vrijedi i $(at)^2 + (bt)^2 + (ct)^2 + (at)(bt)(ct) < 4$. Dakle, postoje nenegativni realni brojevi $x = at$, $y = bt$, $z = ct$ takvi da je $x + y + z = 3$ i $x^2 + y^2 + z^2 + xyz < 4 \quad (*)$. Dakle, da bismo dobili kontradikciju s početnom pretpostavkom, trebamo dokazati da $x, y, z \geq 0$ i $x + y + z = 3$ implicira $x^2 + y^2 + z^2 + xyz \geq 4$ jer će to biti kontradikcija s $(*)$

   Dokažimo sad navedenu nejednakost. Homogeniziranjem nejednakost postaje:

   $$9\sum x \sum x^2 + 3xyz \geq 4\left(\sum x\right)^3$$

   Raspisivanjem obje strane, dobivamo da je to ekvivalentno s:

   $$5\sum x^3 + 3xyz \geq 3\sum xy(x+y)$$

Međutim zadnja nejednakost slijedi zbrajanjem Schurove nejednakosti (za $r = 1$):

$$\sum x^3 + 3xyz \geq \sum xy(x+y)$$

i nejednakosti koja se lagano dokaže AG-om:

$$4\sum x^3 \geq 2\sum xy(x+y) \quad \blacksquare$$

Primjetimo da smo u prethodnom rješenju na neki način "obrnuli" nejednakost i uvjet zadatka. Taj postupak nam zapravo omogućava više slobode u dokazivanju nejednakosti i upravo u njemu se očituje snaga metode kontradikcije. Promotrimo još 2 primjera.

2. Za $a, b, c, d \geq 0$, takve da je $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ dokažite da vrijedi:

$$abcd \leq (1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$$

Rješenje. Pretpostavimo suprotno! Dakle, pretpostavljamo da postoje $a, b, c, d > 0$ takvi da je $a^2+b^2+c^2+d^2 = 1$ i $abcd > (1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$. Tada, zbog toga što je $f(t) = \prod \frac{1-ta}{ta}$ neprekidna funkcija, $f(t) \to \infty$ za $t \to 0^+$ i $f(1) < 1$ slijedi da postoji $t < 1$ takav da je $f(t) = 1$, tj.

$$(at)(bt)(ct)(dt) = (1-at)(1-bt)(1-ct)(1-dt)$$

i, zbog toga što je $t < 1$, vrijedi $(at)^2 + (bt)^2 + (ct)^2 + (dt)^2 < 1$. Dakle, uz supstituciju $x = \frac{1-at}{at}$ i ciklično za y, z, w dobivamo da postoje $x, y, z, w > 0$ takvi da je $xyzw = 1$ i

$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{1}{(1+w)^2} < 1$$

Da bismo dobili kontradikciju s početnom pretpostavkom, i tako dokazali zadatak, preostaje nam dokazati da za $x, y, z, w > 0$, takve da je $xyzw = 1$ vrijedi

$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{1}{(1+w)^2} \geq 1$$

Dokažimo tu nejednakost.

Iz Cauchy-Schwarzove nejednakosti dobivamo

$$(1+x)^2 \leq (1+xy)\left(1+\frac{x}{y}\right) \quad \text{i} \quad (1+y)^2 \leq (1+xy)\left(1+\frac{y}{x}\right)$$

i analogno za par z, w. Odatle slijedi:

$$\sum \frac{1}{(1+x)^2} \geq \frac{y}{(x+y)(1+xy)} + \frac{x}{(x+y)(1+xy)} + \frac{z}{(z+w)(1+zw)} +$$

$$+\frac{w}{(z+w)(1+zw)} = \frac{1}{1+xy} + \frac{1}{1+zw} = 1$$

Ovime smo dokazali zadatak. $\blacksquare$

3. Zadani su $a, b, c > 0$ takvi da je $ab + ac + bc = 3$. Dokažite da vrijedi:

$$\sqrt{a+3} + \sqrt{b+3} + \sqrt{c+3} \geq 6$$

Rješenje. Pretpostavimo suprotno! Dakle, pretpostavljamo da postoje $a, b, c \geq 0$ koji zadovoljavaju uvjet zadatka i za koje vrijedi

$$\sum \sqrt{a+3} < 6$$

Tada postoji $t > 1$ takav da je $\sum \sqrt{at+3} = 6$ i tada zbog $t > 1$ vrijedi $(at)(bt) + (at)(ct) + (bt)(ct) > 3$. Stavimo supstituciju $x = \sqrt{at+3}$, $y = \sqrt{bt+3}$ i $z = \sqrt{ct+3}$. Tada nam početna pretpostavka kaže da postoje $x, y, z > 0$ takvi da je $x + y + z = 6$ i

$$\sum (x^2 - 3)(y^2 - 3) > 3$$

Dakle, da bismo dokazali zadatak (tj. dobili kontradikciju s početnom pretpostavkom), treba dokazati da za $x, y, z > 0$ takve da je $x + y + z = 6$ vrijedi

$$\sum (x^2 - 3)(y^2 - 3) \leq 3$$

Posljednja nejednakost može se dokazati homogeniziranjem i zatim raspisivanjem i zapisom u obliku sume kvadrata, međutim pokazat ćemo kako se metodom u sljedećem poglavlju puno lakše dokaže navedena tvrdnja.

Mixing variables

Mixing variables metodom nazivamo svaki način dokazivanja nejednakosti u kojem dokazujemo nejednakost tako da jednu stranu nejednakosti shvatimo kao funkciju u n varijabli i zatim provjeravamo kako se ponaša vrijednost funkcije mijenjanjem vrijednosti varijabli. U ovom poglavlju iskazat ćemo 2 teorema koji će nam omogućiti da dokažemo rast ili pad funkcije samo kod određene promjene dviju varijabli i iz toga zaključimo gdje funkcija može postizati ekstrem ili supremum. Teorem nećemo dokazivati budući da koristi pojmove matematičke analize nego ćemo ga pokušati intuitivno razumjeti radi lakšeg korištenja.

Teorem 8 (Mixing variables lema). *Neka je $(a_1, \ldots, a_n)$ uređena n-torka realnih brojeva. Provedimo sljedeću, nazovimo je Δ, transformaciju:*

- *odaberimo $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takve da je*

$$a_i = \min\{a_1, \ldots, a_n\} \quad i \quad a_j = \max\{a_1, \ldots, a_n\};$$

- *zamijenimo a_i i a_j sa $\dfrac{a_i + a_j}{2}$.*

Ponavljanjem ove transformacije, svaki član uređene n-torke konvergira k

$$a = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

"Konvergira k" znači da ako puno puta primjenjujemo napisanu transformaciju, svi članovi n-torke bivat će sve bliže napisanom broju a.

Prethodnu lemu nećemo ovdje dokazivati budući da koristi pojmove matematičke analize, ali možemo je barem intuitivno objasniti. Naime, u svakom koraku mi najveći i najmanji član stavimo "u sredinu" i razlika između najvećeg i najmanjeg člana na taj način se konstantno smanjuje pa se svi članovi n-torke nalaze u sve manjem intervalu u svakom koraku. Jedini problem je još opravdati zašto veličina tog intervala stvarno teži k 0, ali to je zapravo jedini netrivijalan korak dokaza prethodne leme.

Koristeći prethodnu lemu možemo dokazati razne varijante sljedećeg teorema. Ideja dokaza svih tih teorema je ista, samo je pitanje koliko jake uvjete na domeni ćemo uzeti da možemo garantirati uopće postojanje maksimuma.

Budući da se oba sljedeća teorema dokazuju koristeći samo *Mixing variables lemu*, njih zapravo zovemo istim imenom.

Teorem 9 (Mixing variables teorem (MVT))**.** *Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija takva da za svaku uređenu n-torku $(x_1, \ldots, x_n)$ realnih brojeva vrijedi $f(x_1, \ldots, x_n) \leq f(\Delta(x_1, \ldots, x_n))$. Tada je*

$$\sup_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n) = \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x, \ldots, x)$$

Prethodni teorem nam govori da funkcija sa danim svojstvom može "postići" supremum samo u točkama oblika $(x, \ldots, x)$. Da bismo provjerili nejednakost, dovoljno je provjeriti tvrdnju samo u takvim točkama. Koristimo pojam supremuma umjesto maksimuma jer ne možemo garantirati postojanje maksimuma. Npr. funkcija $f(x, y) = x + y$ zadovoljava uvjete teorema, a nema maksimum na $\mathbb{R}^2$. U slučaju da vrijedi obratna nejednakost, "sup" samo zamijenimo sa "inf" i tvrdnja zadatka i dalje vrijedi (što slijedi jednostavno promatranjem funkcije $-f$). Drugi teorem u ovom poglavlju nam daje sličan zaključak, samo u ovom slučaju nećemo "miksati" sve varijable već samo neke. To će nam povećati skup na kojemu treba provjeriti vrijednost funkcije, ali i time ćemo analizirati samo funkciju jedne varijable, za što imamo puno alata.

Definicija. Nazovimo transformaciju uređene n-torke u kojoj najprije odaberemo najveći odnosno najmanji element i zatim primjenjujemo Δ transformaciju na sve članove osim njega, Δ_{max} odnosno Δ_{min} transformacijom.

Teorem 10 (Mixing variables teorem (MVT))**.** *Neka je $c \in \mathbb{R}$,*

$$S = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + \cdots + x_n = c\}$$

i $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija takva da za svaku uređenu n-torku $(x_1, \ldots, x_n)$ realnih brojeva vrijedi $f(x_1, \ldots, x_n) \leq f(\Delta_{min}(x_1, \ldots, x_n))$. Tada vrijedi

$$\sup_{(x_1,\ldots,x_n)\in S} f(x_1, \ldots, x_n) = \sup\left\{f(x_1, \ldots, x_n) : x_i = a \leq \frac{c}{n}, x_j = \frac{c-a}{n-1} \quad za \quad j \neq i\right\}.$$

Ako Δ_{min} zamijenimo s Δ_{max}, onda vrijedi:

$$\sup_{(x_1,\ldots,x_n)\in S} f(x_1, \ldots, x_n) = \sup\left\{f(x_1, \ldots, x_n) : x_i = a \geq \frac{c}{n}, x_j = \frac{c-a}{n-1} \quad za \quad j \neq i\right\}.$$

Dakle, ako sve osim jedne varijable miksamo Δ transformacijom, funkcija može "postizati" supremum samo u točkama kad su sve te varijable koje smo miksali jednake, a varijabli koju nismo dirali ne možemo ništa reći (te treba provjeriti sve vrijednosti koje ona može postići).

Pokažimo sada kako se prethodni teorem koristi u zadacima.

Zadaci

1. Neka su $a, b, c \geq 0$ realni brojevi, takvi da je $a + b + c = 3$. Dokažite da vrijedi
$$a^2 + b^2 + c^2 + abc \geq 4$$

   Rješenje. Označimo $f(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 + abc$. BSO pretpostavimo $a \geq b \geq c$. Primjetimo sad da za $t = \frac{a+b}{2}$ vrijedi:
$$f(a, b, c) - f(t, t, c) = \frac{(2-c)}{4}(a-b)^2 \geq 0$$
   pa prema MVT treba dokazati samo da je $f(s, s, c) \geq 4$, gdje je $s = \frac{3-c}{2}$. Zbog $0 \leq c \leq 1$ vrijedi $1 \leq s \leq \frac{3}{2}$. Nejednakost tada postaje
$$2s^2 + (3-2s)^2 + s^2(3-2s) \geq 4 \Leftrightarrow (s-1)^2(5-2s) \geq 0$$
   gdje posljednja nejednakost očito vrijedi zbog $s \leq \frac{3}{2}$.

2. Zadani su realni brojevi $a, b, c, d > 0$, takvi da je $abcd = 1$. Dokažite da je
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 4 \geq 2(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)$$

   Rješenje. Dovoljno je provjeriti slučaj kad je $a \geq b \geq 1 \geq c \geq d$. Ako označimo $f(a, b, c, d) = RHS - LHS$, zbog $(a-1)(b-1) \leq (\sqrt{ab}-1)^2$, $(c-1)(d-1) \leq (\sqrt{cd}-1)^2$ i $a^2+b^2+c^2+d^2 \geq 2(ab+cd)$ vrijedi $f(a, b, c, d) \leq f(\sqrt{ab}, \sqrt{ab}, \sqrt{cd}, \sqrt{cd}) = f(x, x, y, y)$, gdje je $x = \sqrt{ab}$ i $y = \sqrt{cd}$ pa ostaje za dokazati da za $xy = 1$, uz $x \geq 1 \geq y$ vrijedi $x^2+y^2-2 \geq (x-1)^2(y-1)^2$. Međutim, to je ekvivalentno s: $(x-y)^2 \geq (x-1)^2(y-1)^2$, odnosno s $x - y \geq (x-1)(1-y) \Leftrightarrow y \leq 1$, što očito vrijedi po pretpostavci.

3. Za $a, b, c \geq 0$, takve da je $a + b + c = 2$ dokaži da vrijedi:
$$ab(a+b) + ac(a+c) + bc(b+c) \leq 2$$

   Rješenje. BSO možemo pretpostaviti $b = max\{a, b, c\}$. Uz $f(a, b, c) = LHS$ vrijedi $f(a, b, c) - f(a+c, b, 0) = ac(a+c-2b) \leq 0$ pa je dovoljno dokazati da je $f(a+c, b, 0) \leq 2$. To vrijedi zbog $f(a+c, b, 0) = (a+c)b(a+c+b) = 2b(a+c) \leq 2$, gdje posljednja nejednakost slijedi iz AG nejednakosti.

4. Zadani su realni brojevi $a, b, c, d \geq 0$, takvi da je $a+b+c+d = 2$. Dokažite da vrijedi:
$$(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)(c^2+d^2+a^2)(d^2+a^2+b^2) \leq 4$$

Rješenje. BSO možemo pretpostaviti da je $a \geq b \geq c \geq d$ i tada se lako provjeri da uz $f(a,b,c,d) = LHS$ vrijedi

$$f(a,b,c,d) \leq f\left(a + \frac{c+d}{2}, b + \frac{c+d}{2}, 0, 0\right)$$

nakon čega ostaje za dokazati da za x, y, takve da je $x + y = 2$ vrijedi $xy(x^2 + y^2) \leq 2$, što je jednostavna posljedica AG nejednakosti.

5. (IMO SL 1997) Zadani su realni brojevi $a, b, c, d \geq 0$, takvi da je $a + b + c + d = 1$. Dokažite da vrijedi

$$abc + abd + acd + bcd \leq \frac{1}{27} + \frac{176}{27}abcd$$

i odredi slučajeve jednakosti.

Rješenje. BSO možemo pretpostaviti $a \leq b \leq c \leq d$ i stavimo da je

$$f(a,b,c,d) = ac(b+d) + bd(a + c - \frac{176}{27}ac)$$

Primjetimo da iz $a + c \leq \frac{1}{2}$ (pretpostavka) i $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \geq \frac{4}{a+c}$ (AH nejednakost) slijedi $a+c \geq 8ac > \frac{176}{27}ac$ Dakle iz AG nejednakosti i prethodne opservacije, slijedi

$$f(a,b,c,d) \leq f\left(a, \frac{b+d}{2}, c, \frac{b+d}{2}\right)$$

pa prema MVT za Δ_{min} transformaciju vrijedi da je dovoljno dokazati da je $f(a,t,t,t) \leq \frac{1}{27}$, gdje je $t = \frac{1-a}{3}$, odnosno ostaje za dokazati da je

$$3at^2 + t^3 \leq \frac{1}{27} + \frac{176}{27}at^3$$

Međutim, to je ekvivalentno s

$$(1-3t)(4t-1)^2(11t+1) \geq 0$$

Gdje posljednja nejednakost očito vrijedi jer je $1 - 3t = a \geq 0$. Jednakost vrijedi za $a = b = c = d = \frac{1}{4}$ i za $a = 0, b = c = d = \frac{1}{3}$ te za ciklične permutacije.

Zadaci za vježbu

1. Zadani su $a_1, \ldots, a_n > 0$. Dokažite da vrijedi:

$$\sum \frac{a_k^3}{a_k^2 + a_{k+1}^2} \geq \frac{1}{2}\sum a_k$$

2. Zadani su realni brojevi $x, y, z \geq 0$. Dokažite da vrijedi

$$(xy + xz + yz)\left(\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(x-z)^2} + \frac{1}{(y-z)^2}\right) \geq 4$$

3. Zadani su $a, b, c, d > 0$. Dokažite da vrijedi:

$$\sum \frac{a}{b^2 + c^2 + d^2} \geq \frac{4}{a + b + c + d}$$

4. Zadani su realni brojevi $a, b, c \geq 0$. Dokažite da vrijedi

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 4|(a - b)(a - c)(b - c)|$$

5. (MEMO 2012) Neka su $a, b, c > 0$ takvi da je $abc = 1$. Dokažite da vrijedi

$$\sqrt{9 + 16a^2} + \sqrt{9 + 16b^2} + \sqrt{9 + 16c^2} \geq 3 + 4(a + b + c)$$