DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
Primošten, 4.travnja-6.travnja 2016.

7. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Neka je c cijena ulaznice prije, a C nakon poskupljenja i neka je z zarada prije, a Z nakon poskupljenja te neka je n broj gledatelja prije, a N poslije poskupljenja.

Cijena ulaznica povećala se 40% pa je $C = 1.4\,c$, a zarada se povećala 26% pa je $Z = 1.26\,z$.

Broj gledatelja je manji i iznosi p% broja gledatelja prije poskupljenja cijene ulaznica pa vrijedi da je $N = p\% \cdot n = \frac{p}{100} \cdot n$.

Zarada prije poskupljenja je $z = n \cdot c$, a zarada poslije poskupljenja je $Z = N \cdot C$.

Dalje vrijedi $Z = N \cdot C = \frac{p}{100} \cdot n \cdot 1.4 \cdot c = 1.4 \cdot \frac{p}{100} \cdot (n \cdot c) = 1.4 \cdot \frac{p}{100} \cdot z$.

Dalje je $1.26 \cdot z = 1.4 \cdot \frac{p}{100} \cdot z$ odnosno $1.26 = 1.4 \cdot \frac{p}{100}$ te konačno $\frac{p}{100} = \frac{1.26}{1.4} = \frac{126}{140} = \frac{90}{100}$.

Prema tome je $N = 90\ \%\ n$. Dakle, broj gledatelja smanjio se za 10 %.

Drugi način.

Neka je c cijena ulaznice prije, a C nakon poskupljenja i neka je z zarada prije, a Z nakon poskupljenja te neka je n broj gledatelja prije, a N poslije poskupljenja.

Tada vrijedi $z = n \cdot c$ i $Z = N \cdot C$.

Cijena ulaznica povećala se 40% pa je $C = 1.4\,c$, a zarada se povećala 26% pa je $Z = 1.26\,z$.

Dalje vrijedi $Z = N \cdot C = N \cdot 1.4c$ i $Z = 1.26z = 1.26\,n \cdot c$ odnosno $N \cdot 1.4c = 1.26\,n \cdot c$.

Zaključujemo da je

$$\frac{N}{n} = \frac{1.26c}{1.4c} = \frac{1.26}{1.4} = 0.9 \text{ ili } N = 0.9n.$$

Prema tome je $N = 90\ \%\ n$. Dakle, broj gledatelja smanjio se za 10 %.

2. Prvi način.

Jednakosti $\frac{a+b}{3}=\frac{b+c}{4}=\frac{c+a}{5}$ mogu se zapisati kao tri jednadžbe.

1. $\frac{a+b}{3}=\frac{b+c}{4} \Rightarrow 4a+4b=3b+3c \Rightarrow b=3c-4a$
2. $\frac{b+c}{4}=\frac{c+a}{5} \Rightarrow 5b+5c=4c+4a \Rightarrow c=4a-5b$
3. $\frac{a+b}{3}=\frac{c+a}{5} \Rightarrow 5a+5b=3c+3a \Rightarrow 2a=3c-5b$

Koristeći drugu i treću jednadžbu dobiva se:

$$c=4a-5b=2\cdot 2a-5b=2\cdot(3c-5b)-5b=6c-10b-5b=6c-15b \Rightarrow 5c=15b \Rightarrow \underline{c=3b}.$$

Dalje, iz treće jednadžbe dobiva se: $2a=3c-5b=3\cdot 3b-5b=9b-5b=4b \Rightarrow \underline{a=2b}$.

Nakon uvrštavanja dobivamo redom:

$$\overline{abc}=100\cdot a+10\cdot b+c=100\cdot 2b+10\cdot b+3b=200b+10b+3b=213b.$$

Budući da su *a*, *b* i *c* znamenke, postoje tri troznamenkasta broja za $b\in\{1,2,3\}$, a traženi brojevi su

213, 426, 639.

Drugi način.

Raspisujući zadani uvjet redom dobivamo:

$$\frac{a+b}{3}=\frac{b+c}{4}=\frac{c+a}{5}=k, k>0$$

$$\frac{a+b}{3}=k \Rightarrow a+b=3\cdot k \Rightarrow \underline{a=3k-b}$$

$$\frac{c+a}{5}=k \Rightarrow c+a=5\cdot k \Rightarrow c=5k-a=5k-(3k-b)=5k-3k+b \Rightarrow \underline{c=2k+b}$$

$$\frac{b+c}{4}=k \Rightarrow b+c=4\cdot k \Rightarrow b=4k-c=4k-(2k+b)=4k-2k-b=2k-b$$

$$\underline{b=2k-b} \Rightarrow 2b=2k \Rightarrow k=b$$

Prema tome, za znamenke *a*, *b* i *c* vrijedi $a=2k,\ b=k,\ c=3k,\ k\in N$. Uvrštavanjem prirodnih brojeva umjesto *k*, redom dobivamo:

k	1	2	3	4
$a=2k$	2	4	6	8
$b=k$	1	2	3	4
$c=3k$	3	6	9	12
$\overline{abc}$	213	426	639	-

Budući da su a, b i c znamenke postoje tri troznamenkasta broja za $b \in \{1, 2, 3\}$, a traženi brojevi su 213, 426, 639.

3. Prilikom rješavanja koristi se svojstvo množenja cijelih brojeva: *Umnožak cijelih brojeva je cijeli broj*.

Dakle, pomnoži li se razlomak $\frac{4x-17}{5x+9}$ brojem 5, dobiveni će umnožak ponovno biti cijeli broj, tj. zadani razlomak pišemo u obliku $\frac{4x-17}{5x+9} \cdot 5 = \frac{20x-85}{5x+9}$. Brojnik novog razlomka rastavljamo tako da dobijemo dio koji je višekratnik nazivnika:

$$\frac{20x-85}{5x+9} = \frac{20x+36-121}{5x+9} = \frac{20x+36}{5x+9} - \frac{121}{5x+9} = \frac{4 \cdot (5x+9)}{5x+9} - \frac{121}{5x+9} = 4 - \frac{121}{5x+9}.$$

Razlomak $\frac{4x-17}{5x+9}$ će biti cijeli broj ako je $\frac{121}{5x+9}$ cijeli broj.

Razlomak $\frac{121}{5x+9}$ će biti cijeli broj ako je nazivnik $5x + 9$ djelitelj broja 121.

Djelitelji broja 121 su $1, -1, 11, -11, 121, -121$.

Za pozitivne djelitelje (1, 11 i 121) se ne dobivaju cjelobrojna rješenja.

Za negativne djelitelje (–1, –11 i –121) redom dobivamo:

a) $5x+9=-1 \to 5x=-10 \to x=-2,$

b) $5x+9=-11 \to 5x=-20 \to x=-4,$

c) $5x+9=-121 \to 5x=-130 \to x=-26.$

Uvrštavanjem vrijednosti x u razlomak $\frac{4x-17}{5x+9}$ slijedi:

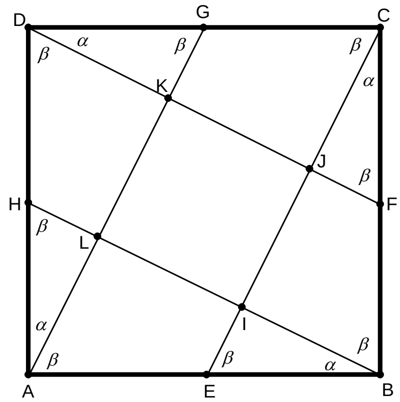
a) za $x=-2$ je $\frac{4x-17}{5x+9} = \frac{-8-17}{-10+9} = \frac{-25}{-1} = 25,$ što je cijeli broj;

b) za $x=-4$ je $\frac{4x-17}{5x+9} = \frac{-16-17}{-20+9} = \frac{-33}{-11} = 3,$ što je cijeli broj;

c) za $x=-26$ je $\frac{4x-17}{5x+9} = \frac{-104-17}{-130+9} = \frac{-121}{-121} = 1,$ što je također cijeli broj.

Dakle, rješenja su cijeli brojevi –2, –4 i –26.

4. Uz oznake kao na slici vrijedi:



Pravokutni trokuti *EBC*, *FCD*, *GDA* i *HAB* međusobno su sukladni prema poučku o sukladnosti trokuta S-K-S jer je $|EB| = |FC| = |GD| = |HA| = 5\text{ cm}$ i $|BC| = |CD| = |DA| = |AB| = 10\text{ cm}$.

Posljedica navedene sukladnosti je jednakost veličina odgovarajućih kutova tih trokuta:

$|\measuredangle HBA| = |\measuredangle ECB| = |\measuredangle FDC| = |\measuredangle GAD| = \alpha$,

$|\measuredangle BEC| = |\measuredangle CFD| = |\measuredangle DGA| = |\measuredangle AHB| = \beta$.

Budući da je $\alpha + \beta = 90°$, slijedi da su kutovi s vrhovima u točkama *I*, *J*, *K* i *L* pravi, tj. da je četverokut *IJKL* pravokutnik te da je $|\measuredangle CBI| = |\measuredangle DCJ| = |\measuredangle ADK| = |\measuredangle BAL| = \beta$.

Pravokutni trokuti *ABL*, *BCI*, *CDJ* i *DAK* sukladni su prema poučku o sukladnosti trokuta K-S-K.

Zaključujemo da je $\overline{EC}$ usporedna s $\overline{AG}$ kao i $\overline{BH}$ s $\overline{FD}$.

Dužina $\overline{JF}$ srednjica je trokuta *BCI* pa je $|IJ| = |CJ| = \frac{1}{2}|IC|$ i $|JF| = \frac{1}{2}|IB| = x$. Analogno vrijedi za duljine stranica preostalih trokuta (*ABL*, *CDJ* i *DAK*), a time i za duljine stranica četverokuta *IJKL*.

Dakle, $|JF| = |KG| = |LH| = |IE| = x$ i $|CJ| = |IJ| = |DK| = |KJ| = |AL| = |LK| = |BI| = |IL| = 2x$.

Dakle, četverokut *IJKL* je kvadrat sa stranicom duljine 2*x*.

Preostaje izračunati površinu kvadrata *IJKL*. To možemo napraviti na više načina.

Prvi način:

Prema gore dokazanom zaključujemo da vrijedi $|EC| = |EI| + |IJ| + |JC| = 5x$ i $|IC| = |IJ| + |JC| = 4x$.

Prema poučku K-K trokut *EBC* sličan je trokutu *BIC* pa vrijedi $|EC| : |BC| = |BC| : |IC|$.

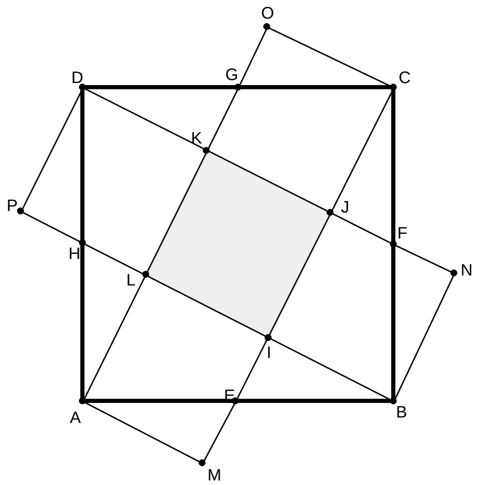
Uvrštavanjem poznatih podataka u taj razmjer dobivamo redom:

$$5x:10=10:4x$$
$$20\cdot x\cdot x=100$$
$$x\cdot x=5$$

Konačno, površina kvadrata *IJKL* jednaka je $P(IJKL)=|IJ|\cdot|JK|=2x\cdot 2x=4\cdot x\cdot x=4\cdot 5=20\text{ cm}^2$.

Drugi način:

Nadopunimo sliku s četiri pravokutna trokuta.

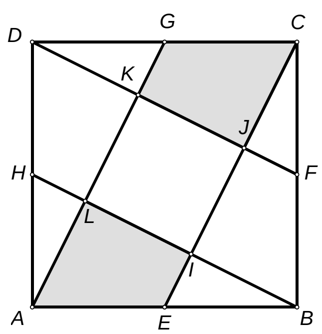


Trapeze *IBFJ*, *JCGK*, *KDHL* i *LAEI* moguće je nadopuniti do kvadrata pravokutnim trokutima *BNF*, *COG*, *DPH* i *AME* koji su sukladni trokutima *CJF*, *DKG*, *ALH* i *BIE*. Jednostavno je uočiti da je površina kvadrata *ABCD* jednaka površini pet manjih kvadrata (*AMIL*, *BNJI*, *COKJ*, *DPLK* i *IJKL* od kojih je jedan osjenčan), a koji su međusobno sukladni.

Dakle, površina osjenčanog kvadrata jednaka je $100:5=20\text{ cm}^2$.

Treći način:

Kvadrat *ABCD* možemo podijeliti na dva sukladna pravokutna trokuta *AGD* i *CEB*. Svaki od njih ima površinu 25 cm². To znači da je površina paralelograma *AECG* jednaka 50 cm².

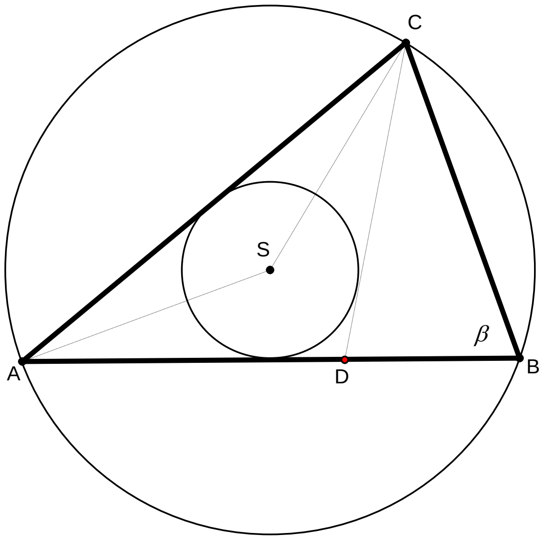


Paralelogram *AECG* sastavljen je od kvadrata *IJKL* (čiju površinu tražimo) i dvaju pravokutnih trapeza *AEIL* i *JCGK*. Duljine osnovica tih trapeza su $2x$ i x, a duljina visine im je jednaka $2x$. To znači da svaki od njih ima površinu $\frac{(2x+x)\cdot 2x}{2}=3x\cdot x=3x^2$, a površina kvadrata jednaka je $2x\cdot 2x=4x\cdot x=4x^2$.

Prema tome, vrijedi $3x^2+3x^2+4x^2=50$, tj. $10x^2=50$, odakle je $4x^2=20$.

Površina kvadrata *IJKL* je 20 cm^2.

5.



Neka je *S* središte upisane kružnice trokuta *ADC* i središte opisane kružnice trokuta *ABC* i neka je $|\measuredangle ABC|=\beta$. Kutovi $\measuredangle ASC$ i $\measuredangle ABC$ su središnji i pripadni obodni kut nad tetivom $\overline{AC}$. Na temelju poučka o središnjem i obodnom kutu vrijedi da je $|\measuredangle ASC|=2\beta$.

Iz trokuta *ASC*, koji je jednakokračan jer je $|SA|=|SC|$, može se zaključiti da je

$$|\measuredangle SAC|=|\measuredangle SCA|=\frac{180^\circ-2\beta}{2}=90^\circ-\beta.$$

Pravac *AS* je simetrala unutarnjeg kuta trokuta *ADC* (*ABC*) pri vrhu *A* pa je

$$\alpha=|\measuredangle CAB|=2\cdot(90^\circ-\beta)=180^\circ-2\beta.$$

Na isti način vrijedi $|\measuredangle ACD|=2\cdot(90^\circ-\beta)=180^\circ-2\beta$.

Dalje možemo nastaviti na više načina.

Prvi način:

Pravac *CD* je simetrala kuta trokuta pri vrhu *C* pa je $\gamma = |\measuredangle ACB| = 2 \cdot (180° - 2\beta) = 360° - 4\beta$.

Iz zbroja kutova trokuta *ABC* redom slijedi

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$
$$\beta + (180° - 2\beta) + (360° - 4\beta) = 180° \to 5\beta = 360° \to \beta = 72°$$

$$\alpha = 180° - 2 \cdot 72° = 36°$$

$$\gamma = 180° - (72° + 36°) = 72°$$

Trokut *ABC* je jednakokračan s kutovima veličina 72º, 72º i 36º.

Drugi način:

Budući da je $|\measuredangle CAB| = |\measuredangle ACD| = 180° - 2\beta$, trokut *ADC* je jednakokračan s osnovicom $\overline{AC}$.

Kut $\measuredangle BDC$ je vanjski kut trokuta *ADC* i vrijedi da je

$$|\measuredangle BDC| = |\measuredangle DAC| + |\measuredangle ACD| = 2(180° - 2\beta) = 360° - 4\beta .$$

Za kutove trokuta *DBC* vrijedi:

$$|\measuredangle BDC| + |\measuredangle CBD| + |\measuredangle DCB| = 180°$$
$$(360° - 4\beta) + \beta + (180° - 2\beta) = 180°$$
$$5\beta = 360°$$
$$\beta = 72°$$

Dalje slijedi da je $\gamma = 72°$ i $\alpha = 180° - 2 \cdot 72° = 36°$.

Treći način:

Zbog činjenice da je u trokutu *ABC* $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ i da je $\alpha = |\measuredangle CAB| = 180° - 2\beta$, vrijedi

$180° - 2\beta + \beta + \gamma = 180°$ odnosno $-\beta + \gamma = 0$ što znači da je $\beta = \gamma$ i da je trokut *ABC* jednakokračan s osnovicom $\overline{BC}$.

Budući da je pravac *CD* simetrala kuta $\measuredangle BCA$, zaključujemo da je $\gamma = 2\alpha$, a onda je i $\beta = 2\alpha$.

Konačno, uvrštavanjem dobivenih relacija u izraz $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ redom dobivamo:

$\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180°$, $5\alpha = 180°$, $\alpha = 36°$ i $\beta = \gamma = 2 \cdot 36° = 72°$.